第24卷 第8期 高能物理与核物理 Vol.24, No.8
2000年8月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 2000

电单极子和磁单极子的统一模型

汤拒非[1)]

(中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要 证明磁单极子和电单极子可以在Hopf丛($S^3=S^2\times S^1$)的基础上统一生成,该丛有结构群$U(1)$. 它在底流形S^2上的联络可以分为电单极型和磁单极型两类. 磁荷有量子化条件而电单极子就是磁量子数$n=0$时的解. 这样,电单极子和磁单极子在理论上具有同一性. 它们是同一事物的两种不同的形态.

通过映射的伦移引入时间坐标,从而使电单极子成为Minkowski空间中的一个〈活化〉的模型. 它具有Lorentz变换下的不变性.

关键词 磁单极子 电单极子 统一模型

1 引言

1931年P.A.M.Dirac[1]在电磁理论中引入了磁单极子的概念. 自那时以来,这个问题一直是物理学上脍炙人口的问题之一. 到今天,理论的论文已不下1000余篇,已经有了许多新的发现和进展,其中一个重要的方面就是认识到了磁单极子的拓扑性质,磁荷被解释为流形的某种拓扑数. 吴-杨[2]于1975年在规范场的理论中引进了纤维丛的描述,使这个问题有了一个完整的数学基础. 1977年A. Trautman[3]指出磁单极子势对应于Hopf丛[4]的联络. 随后,不断有人在这方面进行了研究[5],但他们的论文都只限于磁单极子的讨论而未能触及另一个极为重要的问题,即电单极子势的拓扑根源是什么? 这个问题近20年来一直被忽视,没有进展. 这样,Dirac原来关于自然界电/磁对称的想法并未得到证实,反而增添了一个新的缺陷. 即一方面人们以极大的热忱去研究一个从未发现的对象-磁单极子,对它已经有了较深刻的了解和理论研究. 而对最初的出发点,人们最常遇到的电荷,反而受到冷遇,未能深究. 在纤维丛的理论中,没有它适当的位置. 这是很不公平的. 本文发现,Hopf丛的联络不仅生成磁单极子势,也生成电单极子势. 后者是前者的一个特殊情况($n=0$). 这样,电单极子和磁单极子有了同一的根源. 它们的统一性得到了证明.

1999-07-19收稿

1) 汤拒非(1930—1999),生前为中国科学院研究生院教授,曾任常务副院长. 该文是作者逝世前不久完成的. 现遵其遗嘱经审阅后发表于此,以表示对汤拒非同志的怀念.

702—710

我们的理论中广泛地运用了映射的同伦这一概念．因而讨论的问题虽然有时属于某一特定的映射，但通过伦移就获得了整个同伦类的性质．这样，伦移参数(t)是我们模型中起重要作用的一个参数，自然地通过它引入时间的概念．这使我们的模型成为具有Lorentz不变性的Minkowski空间中的一种模型．这在以后关于电单极子的讨论中将逐步地明朗起来．

2　S^3的纤维化

这里先简要地叙述一下关于S^3的纤维化．在由两个复平面组成的乘积空间($C\times C$)中，定义S^3如下：

$$S^3:\quad \{(Q_1,Q_2)\in C\times C \mid Q_1\overline{Q}_1+Q_2\overline{Q}_2=1\}. \tag{2.1}$$

因此，S^3是乘积空间$C\times C$中的子流形．

令

$$Q_1=|Q_1|e^{i\alpha},\quad Q_2=|Q_2|e^{i\alpha'}, \tag{2.2}$$

并设

$$z=Q_2/Q_1,\quad z'=Q_1/Q_2. \tag{2.3}$$

这里，在z的定义式中Q_1不等于零，而在z'的定义式中Q_2不等于零．因此z,z'不等于∞，但可以等于0．设ω,ω'分别表示z,z'的相角，有

$$\omega=-\omega'=\alpha'-\alpha. \tag{2.4}$$

现在，进行S^3的纤维化．令

$$g=e^{i\eta},\qquad g'=e^{i\eta'},\qquad g,\ g'\in S^1 \tag{2.5}$$

作两个乘积空间

$$(u_1,u_2)=\left(\frac{zg}{\sqrt{1+z\overline{z}}},\frac{g}{\sqrt{1+z\overline{z}}}\right),\qquad (u'_1,u'_2)=\left(\frac{g'}{\sqrt{1+z'\overline{z'}}},\frac{z'g'}{\sqrt{1+z'\overline{z'}}}\right), \tag{2.6}$$

显然，这两个空间都满足(2.1)式的条件，即$\overline{u}_iu_i=1$，$\overline{u'_i}u'_i=1$．因而它们是($C\times C$)空间的子流形(s^3)，同时又是和(z,g)，(z',g')空间同胚的．用下述变换可以把(u_1,u_2)，(u'_1,u'_2)两个空间粘接起来

$$z=\frac{1}{z'},\qquad g'=g_{ab}g. \tag{2.7}$$

式中$g_{ab}=e^{i\omega}$是联接函数．这样，由(2.6)式中两个乘积空间粘合起来的流形就是一个纤维丛空间Ω．它由底流形和纤维组成，在每一局部空间的点上都可看成是底流形在该点邻域与纤维的乘积空间，但整体则不是．存在一个自然投射Φ，把Ω投射到底流形上，即

$$\Phi(u_1,u_2)=u_1/u_2=z,Q_1\neq 0;$$
$$\Phi(u'_1,u'_2)=u'_1/u'_2=1/z',\quad Q_2\neq 0. \tag{2.8}$$

底空间是由z,z'粘接而成的且与S^2同胚的空间，而Ω空间就是纤维化的S^3．上面我们完成了S^3的纤维化．

3　底流形上的联络

纤维丛作为一种流形它由底流形和纤维组成．它的内部点集之间存在有一定的联

络,构成了几何上的实体.这种联络在物理上也有它的表现,这就是规范势.通常物理上研究规范势总是选具有某一特定坐标系的Minkowski时空作为它的底流形,因而规范势的影响仅及于底流形上的纤维和它的截面.事实上联络也可以在非平庸的底流形上定义,底流形的性质这时可以只确定到同胚为止.因而联络与包括纤维和底流形在内的整个流形的性质相关联.本文就是从这样一种整体的关联效应来研究纤维丛和它的联络.这样,我们的研究就更加深入地揭露了纤维丛的本质,并具有更普遍的意义.

为了研究联络,应同时研究纤维的截面.由于 z,z' 平面构成底流形的开复盖,纤维的截面是平面上点的泛函.因此它代表由底流形到纤维的映射,即 $g:S^2\to S^1$.根据拓扑学的理论,这类映射属于零伦映射,即,$\pi_2(S^1)=0$.因而我们可以选取其中一些最简单的映射作为代表映射加以研究.这样得出的结论,在很大程度上代表同伦类的性质,而与代表映射的选取无关.令 (z_1,z_2),(z'_1,z'_2) 分别表示 z,z' 复平面上点的两个分量.用极坐标表示,

$$z=(z_1,z_2):\qquad \begin{cases} z_1=\rho\cos\omega \\ z_2=\rho\sin\omega \end{cases}, \tag{3.1}$$

$$z'=(z'_1,z'_2):\qquad \begin{cases} z'_1=\rho'\cos\omega' \\ z'_2=\rho'\sin\omega' \end{cases}. \tag{3.2}$$

在底平面上选一条单参数 s(或 s')曲线,下列方程式分别定义了 z,z' 平面上的联络 A_j,A'_j 和截面 g,g',由此获得曲线 s(或 s')水平提升[即 $\Phi^{-1}=(u_1,u_2)=(z(s),g(s))$].

这些方程式是

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{\mathrm{i}}A_j\frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}s}\right\}g(s)=0, \tag{3.3}$$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}+\frac{1}{\mathrm{i}}A'_j\frac{\mathrm{d}z'_j}{\mathrm{d}s'}\right\}g'(s')=0, \tag{3.4}$$

式中 $j=1,2$.重复的 j 要求和.g,A,g',A' 按下式变换,

$$g'=g_{ab}g;\qquad A'_i=A_j\frac{\partial z_j}{\partial z'_i}+\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial g^{-1}_{ab}}{\partial z'_i}g_{ab}. \tag{3.5}$$

由于底流形是用两个参数 (ρ,ω) 或 (ρ',ω') 来刻画的,在单参数曲线上有 $\rho=\rho(s)$,$\omega=\omega(s)$ 和 $\rho'=\rho'(s')$,$\omega'=\omega'(s')$ 因而(3.3),(3.4)式可以改写为

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial\omega}+\frac{1}{\mathrm{i}}A_j\frac{\partial z_j}{\partial\omega}g\right\}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}s}+\left\{\frac{\partial g}{\partial\rho}+\frac{1}{\mathrm{i}}A_j\frac{\partial z_j}{\partial\rho}g\right\}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=0, \tag{3.6}$$

$$\left\{\frac{\partial g'}{\partial\omega'}+\frac{1}{\mathrm{i}}A'_j\frac{\partial z'_j}{\partial\omega'}g'\right\}\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}s}+\left\{\frac{\partial g'}{\partial\rho'}+\frac{1}{\mathrm{i}}A'_j\frac{\partial z'_j}{\partial\rho'}g'\right\}\frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}s}=0. \tag{3.7}$$

由于 $\omega(\omega')$ 或 $\rho(\rho')$ 是独立的参数,以上两式中大括号内的项必须为零,于是得到两个联立的方程式组:

$$\frac{\partial g}{\partial\omega}+\frac{1}{\mathrm{i}}A_j\frac{\partial z_j}{\partial\omega}g=0, \tag{3.8a}$$

$$\frac{\partial g}{\partial\rho}+\frac{1}{\mathrm{i}}A_j\frac{\partial z_j}{\partial\rho}g=0, \tag{3.8b}$$

$$\frac{\partial g'}{\partial\omega'}+\frac{1}{\mathrm{i}}A'_j\frac{\partial z'_j}{\partial\omega'}g'=0, \tag{3.9a}$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \rho'} + \frac{1}{\mathrm{i}} A'_j \frac{\partial z'_j}{\partial \rho'} g' = 0. \tag{3.9b}$$

由于 g,A,g',A' 都是方程式求解的对象,两方程组所包含的解是无限多的. 但正如本节开始时所提到的,g,g' 的解(截面)构成了由底流形(S^2)到纤维(S^1)上的映射,这些映射都是零伦的,即 $\pi_2(S^1)=0$,因此,可以选取两类(因为底流形是二维)最简单的映射作为代表映射来加以研究,我们将看到这两类映射所对应的解很容易获得,而且它们有明确的物理意义. 下面进行求解.

首先,取单参数 s 与 ω 相合,这相当于考虑一种最简单的映射,在这种映射下,g 仅与 ω 有关而与 ρ 无关,即 $g=g(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta(\omega)}$,因而(3.8b)式中第一项为零,该式化为代数方程

$$A_j \frac{\partial z_j}{\partial \rho} \equiv A_1 \cos\omega + A_2 \sin\omega = 0, \tag{3.10}$$

(3.8a)式则变为

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\omega} + \frac{1}{\mathrm{i}}(-A_1\rho\sin\omega + A_2\rho\cos\omega) = 0. \tag{3.11}$$

由于 η 只是 ω 的函数,(3.11)式中的 ρ 应当消去,因而 A_1,A_2 应该具有如下的形式

$$A_1, A_2 \approx \frac{1}{\rho},$$

另一方面,为了满足(3.10)式,A_1,A_2 应该具有如下的形式

$$A_1, A_2 \approx -\sin\omega, \cos\omega.$$

综合以上两点得到

$$A_1 = \frac{-q\sin\omega}{\rho}, \qquad A_2 = \frac{q\cos\omega}{\rho}, \tag{3.12}$$

式中 q 是常数. 也可以用下式求出联络沿 ρ,ω 方向的分量 A_ρ, A_ω

$$\begin{aligned} A_j \mathrm{d}z_j &= A_1 \mathrm{d}(\rho\cos\omega) + A_2 \mathrm{d}(\rho\sin\omega) = \\ &(A_1\cos\omega + A_2\sin\omega)\mathrm{d}\rho + (-A_1\rho\sin\omega + A_2\rho\cos\omega)\mathrm{d}\omega = \\ &A_\rho \mathrm{d}\rho + A_\omega \rho \mathrm{d}\omega, \end{aligned} \tag{3.13}$$

因此有

$$A_\rho = A_1\cos\omega + A_2\sin\omega, \quad A_\omega = -A_1\sin\omega + A_2\cos\omega. \tag{3.14}$$

在(3.12)的条件下,得到

$$A_\rho = 0, \quad A_\omega = q/\rho. \tag{3.15}$$

把上述结果应用到(3.8a),得到

$$\frac{\partial g}{\partial \omega} + \frac{1}{\mathrm{i}} g A_\omega \rho = 0, \tag{3.16a}$$

由此得出

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\omega} + \frac{q}{\mathrm{i}} = 0, \tag{3.16b}$$

因此

$$\eta = q(\omega + c), \tag{3.17}$$

这里 c 是积分常数. 于是有

$$g = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(\omega+c)} \tag{3.18}$$

用以上相同的方法,可以得出

$$A'_1 = \frac{-q\sin\omega'}{\rho'}, \qquad A'_2 = \frac{q\cos\omega'}{\rho'}, \tag{3.19}$$

$$A'_{\rho'} = 0, \qquad A'_{\omega'} = q/\rho' \tag{3.20}$$

和 $g' = e^{iq(\omega'+c)} = e^{-iq(\omega+c)}$,这里不再重复. 由以上结果得到:

$$g_{ab} = e^{-2iq\omega}. \tag{3.21}$$

为了使(3.21)式中的 g_{ab} 成为单值函数,应有

$$q = n/2 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots), \tag{3.22}$$

注意到当 $n=0$ 时,上述诸解式(3.18)—(3.21)都成为平庸的,因而在这一情况下,需要从另一角度研究底流形上的联络和截面. 方法如下:

考虑另外一种由 z - 平面到纤维上的映射,在这种映射下 g 仅与 ρ 有关,这时可以取 $s=\rho$,则有 $g=g(\rho)$,于是(3.8a)式的第一项为零,得到

$$A_1(-\rho\sin\omega) + A_2\rho\cos\omega = 0. \tag{3.23}$$

为了使上面等式在 ρ 取任意值时都成立,A_i 应该具有如下的形式

$$A_i \approx \frac{1}{\rho} \qquad (i = 1,2).$$

将(3.8b)式变为如下的形式

$$i\frac{d\eta}{d\rho} + \frac{1}{i}(A_1\cos\omega + A_2\sin\omega) = 0. \tag{3.24}$$

为了使上式不含有变量 ω, A_i 应当具有如下的形式

$$A_1 = \frac{b}{\rho}\cos\omega, \quad A_2 = \frac{b}{\rho}\sin\omega, \tag{3.25}$$

式中 b 为常数,这时的(3.23)式成了恒等式(即与 ω 无关),而(3.24)式变为

$$i\frac{d\eta}{d\rho} + \frac{b}{i\rho} = 0 \quad . \tag{3.26}$$

这正是我们所需要的结果. 以后将看到 b 代表电荷,a 为积分常数. 现在容易得出

$$\eta = b\ln\rho + a, \tag{3.27}$$

$$g = e^{ib\ln\rho + ia}, \tag{3.28}$$

$$A_\rho = b/\rho, \ A_\omega = 0. \tag{3.29}$$

同样对于(3.9a),(3.9b)两式也有相似的解,只要把相应的量换成带撇的量就可. 因此,有

$$A_{\rho'} = b/\rho' \quad , \quad A_\omega = 0, \tag{3.30}$$

$$g' = e^{ib\ln\rho' + ia}. \tag{3.31}$$

这里选取和(3.26)式相同的积分常数. 由上面的结果得到

$$g_{ab} = e^{ib\ln\rho/\rho'} = e^{2ib\ln\rho}, \qquad 0 < \rho < \infty. \tag{3.32}$$

上式中在 ρ 的定义域内 g_{ab} 是单值函数,因而对 b 不存在量子化条件的限制. 它应当取电子电荷的值 e.

把(3.15)—(3.21)式的解叫作磁单极解,而把(3.25)—(3.32)式的解叫作电单极解.

在以下应用了拓扑空间关于映射的扩张理论[6]以后,将能在 E^3(或 R^3)空间中更清楚的显示这一点.

4 在 E^3 空间中磁单极子的生成

(3.17)—(3.21)式的解是在底流形复平面 z, z' 上表示的解,为表现出它的物理图象,应当把它扩展到真实空间 E^3 上去. 这是由从空间 Ω 到 E^3 空间中的一种映射. 在 E^3 空间中可以采用极坐标 r, θ, ϕ,而在 Ω 空间中可以采用(ρ, ω, η),这里 η 是纤维 g 的相角. 于是,有如下的坐标变换:

$$f: \qquad E^3 \to \Omega, \tag{4.1}$$

$$\rho = \frac{r\sin\theta}{1-\cos\theta}, \quad \omega = \phi, \ \eta = q\phi. \tag{4.2}$$

式中　$0 < r < \infty; \ \ 0 < \theta \leqslant \pi; \ \ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi,$

$$\rho' = \frac{r'\sin\theta'}{1-\cos\theta'}, \quad \omega' = \phi', \quad \eta' = q\phi'. \tag{4.3}$$

式中　$0 < r' < \infty; \ \ 0 \leqslant \theta' < \pi; \ \ 0 \leqslant \phi' \leqslant 2\pi$

$$\theta' = \pi - \theta, \qquad r' = r, \qquad \phi = -\phi'.$$

事实上,在磁单极的情况下,上述变换就是用一个球极变换,把 Ω 空间中的(z, z')平面变到 E^3 空间中半径为 r, r' 的南北两半球面(S_+^2, S_-^2),这时 z 与 z' 之间的对应关系为 $zz' = r^2$. 当 r 连续地从大于 0 变到∞,(S_+^2, S_-^2)就扩充到整个$\{E^3-(0)\}$空间,这时,由(ρ, ω, η)3 个参数所描述的空间就变换为(r, θ, ϕ)所描述的$\{E^3-(0)\}$空间. 经过变换后的底流形现在是 S_+^2, S_-^2. 可以通过变换式(4.2)(4.3)诱导出在底流形 S_+^2, S_-^2 上的联络. 方法如下:

$$\begin{aligned} A_j \mathrm{d}z_j = {} & A_j \frac{\partial z_j}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\mathrm{d}r + A_j \frac{\partial z_j}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + A_j \frac{\partial z_j}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi + \\ & A_j \frac{\partial z_j}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial r}\mathrm{d}r + A_j \frac{\partial z_j}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + A_j \frac{\partial z_j}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi = \\ & A_r \mathrm{d}r + A_\theta \mathrm{d}\theta + A_\phi \mathrm{d}\phi, \end{aligned} \tag{4.4}$$

因此,有

$$A_r = A_j \frac{\partial z_j}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} + A_j \frac{\partial z_j}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial r}, \qquad A_\theta = A_j \frac{\partial z_j}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + A_j \frac{\partial z_j}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \theta},$$

$$= A_j \frac{\partial z_j}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \phi} + A_j \frac{\partial z_j}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \phi}, \tag{4.5}$$

取(3.12)式的解代入上式,注意到

$$A_j \frac{\partial z_j}{\partial \rho} = 0, \quad A_j \frac{\partial z_j}{\partial \omega} = -1,$$

就可求得

$$g = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\phi + \mathrm{i}q\chi} \quad A_\theta = A_r = 0, \quad A_\phi = \frac{-q}{\rho} = \frac{-q(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}. \tag{4.6}$$

很显然这是南半球上磁单极的解. 进一步,根据对称性,还可得出

$$g' = e^{iq\omega' + i\alpha} = e^{-iq\phi + i\alpha} \quad , \tag{4.7}$$

$$A'_\theta = A'_r = 0, \qquad A_{\phi'} = \frac{-q(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} \quad . \tag{4.8}$$

(4.6)—(4.8)是在 $E^3-(0)$空间中展示出来的磁单极子势和截面. 在这一表示中,用$\{E^3-(0)\}$空间的点集代替 $S^3=S^2\times S^1$ 中的点集. 这时 S^1 的参数 η 变换到与 ϕ 相合,而 ρ 则因 r 参数的引入而通过(4.2)式把 S^2 面上诸截面的点集扩充到整个$\{E^3-(0)\}$空间.

5 电单极子

关于电单极子的生成,要比磁单极子来得复杂. 这是由于电单极子的库仑势属于联络的第四分量. 因而必须在真实的四维时空中才能加以显示. 我们注意到在同伦论的理论中,映射的伦移可以看作是"像"随时间的移动. 伦移的参数 $I:0\leqslant t\leqslant 1$ 可以看做是时间. 这样,为了显示纤维丛理论中映射的伦移这一原理,应当把底流形加以扩充使它包含时间 t 这个参数. 由于时间参数的引入,使一个静态的几何流形($S^3=S^2\times S^1$)成为可以随时间变化的流形. 因而可以嵌入真实的四维时空中,完成对电单极子的显示. 或者说生成电单极子.

为了更清楚地说明这一点,令 g 仍表示$S^2\to S^1$ 的映射. 由于 $\pi_2(S^1)=0$,g 同伦于常值映射. 还由于流形 S^2 是 $E^3-(0)$的收缩核. 映射 $g:S^2\to S^1$ 可以像上一节中所作的那样自然地扩充到 $E^3-(0)$空间而成为 $g(r,\theta,\phi)$,这里 r 是映射扩充的参数. 事实上,采取如下的球极投影变换

$$\rho = \frac{r\sin\theta}{1-\cos\theta}, \omega = \phi; \quad \rho' = \frac{r\sin\theta'}{1-\cos\theta'}, \omega' = \phi',$$

就能够把 S^2 扩充为 $E^3-(0)$流形. 根据(3.27)式

$$\eta = b\ln\rho + a = b\ln r + b\ln\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) + a,$$

这里的 a 是与r 无关的常数. 因此,有

$$d_r\eta = \frac{\partial}{\partial r}[b\,d\ln\rho]dr = \frac{b}{r}dr = A_r dr, \quad A_r = b/r. \tag{5.1}$$

值得一提的是这里的 A_r 并不是电单极子的库仑势,后者属于联络的第四分量,必须在底流形经过时间轴上的扩充以后才能得到. 下面考虑 g 在时间轴上的扩充.

先用 G 代表经过扩充以后的映射g,即令 $G:\{E^3-(0)\}\to S^1$. 记 f_1,f_2 为 G 中的两个不同的映射,$f_1,f_2\in G:\{E^3-(0)\}\to S^1$. 其次设 $F:\{E^3-(0)\}\times I\to S^1$ 为由 f_1 到 f_2 的伦移,$I=[0,1]$. 根据定义 $F(x,t|t\in I)$是 $G:\{E^3-(0)\}\times I\to S^1$ 的一族映射,它连续地依赖于时间 t,即有

$$G(x,t\,|\,x\in\{E^3-(0)\},t\in I) = F(x,t), \qquad G\in S^1$$

因此,可以把 F 作为G 在新的底流形$\{E^3-(0)\}\times I$ 上的定义,或者可以认为是函数 G 在时间轴上的扩充. 按照 Tietze 的扩张定理这里的 I 可以扩张为$t:-\infty<t<\infty$. 这样,

我们就有了一个更大的底流形 $\{R^3-(0)\}\times t$，把这个底流形叫做 B，从而构成一个更大的丛空间 $B\times S^1$，这个丛空间包含 Hopf 丛作为它的子流形．现在我们可以考虑它的联络了，由于 $G\in S^1$ 是通过伦移 F 而扩张到 t 轴上的，所以有

$$\mathrm{d}_t G=\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

令

$$\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t=-GA_t\mathrm{d}t,$$

A_t 是在伦移轴（即时间轴）上定义的联络，即沿时间轴方向选一条单参数曲线，得到下面联络的定义

$$\mathrm{d}_t G+GA_t\mathrm{d}t=0, \tag{5.2}$$

由此得

$$\mathrm{d}_t\eta=\mathrm{i}A_t\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

回到伦移原理，我们知道，通过伦移可以把两个同伦但不相同的映射联接起来．这导致(5.1)式和(5.3)式的左边相等，从而得出

$$A_t=-\mathrm{i}\frac{b}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}. \tag{5.4}$$

现在要选定 $\mathrm{d}r$ 和 $\mathrm{d}t$ 的度规．物理上以空间位移来度量时间，或者以时间来度量位移，这是习以为常的事．因为时间 $\mathrm{d}t$ 乘以不变的光速就是相应的位移．在自然单位制中，光速 $c=1$，从而(5.4)式中的 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=1$．由此得到

$$A_t=-\mathrm{i}\frac{b}{r}, \tag{5.5}$$

这样，得到了联络的第四分量，它就是电单极子的库伦势．

根据球极变换公式和(5.6)式

$$A_r=A_j\frac{\partial z_j}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}+A_j\frac{\partial z_j}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial r},\qquad A_\theta=A_j\frac{\partial z_j}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+A_j\frac{\partial z_j}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\theta},$$

$$A_\phi=A_j\frac{\partial z_j}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}+A_j\frac{\partial z_j}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\phi}, \tag{5.6}$$

容易得到联络的其它分量．但很易证明这些都属于纯规范场，对电磁场强度的计算没有贡献．因而有

$$F_{tr}=-\frac{b}{r^2}, \tag{5.7}$$

$$F_{\theta r}=F_{\omega\theta}=F_{\omega r}=F_{t\omega}=F_{t\theta}=0. \tag{5.8}$$

这清楚地表明得到的是一个电单极子．

6　总结和讨论

上述结果表明电单极子与磁单极子有同一的拓扑根源，它们都是由 Hopf 丛 $S^3=S^2\times S^1$ 经过映射的扩充所生成的．这里的映射就是由 S^2 到 S^1 的映射．虽然生成它们的映射各有所不同，但由于 $\pi_2(S^1)=0$，生成它们的两个映射是同伦的．因而可以通过伦移，把其中一个连续地变到另一个，即磁荷的量子化条件其实就是电荷的量子化条件．

还有不少的问题,诸如为什么实验上只能观察到电单极子,而不能发现磁单极子?本模型中电单极子的质量如何?产生电单极子的物质背景是什么?这些问题我们将在另外的文章中讨论.对于最后一个问题,在这里提出我们的一点看法,也许是有益的.很明显,电单极子是客观的实在.它的出现有其物质背景.我们可以把这种物质叫做'拓扑以太'.它不是理想气体或理想流体.它可以像流形一样被描写.它的运动发展遵循某些守恒的规律,特别像能量守恒这样的定律.在今后的研究中,我们将会发现它更多的性质.

参考文献(References)

1 Dirac P A M. Proc. Roy. Soc., 1931, **A133**: 60

2 WU. T T, YANG C N. Physical Review, 1975, **D12**: 3845

3 Andrzej Trautman. International Journal of Theoretical Physics, 1977, **16**(8): 561—565

4 Hopf H. Mathematische Annlen, 1931, **104**: 637

5 Ryder L H. J. Phys. A: Math. Gen., 1980, **13**: 437—447; Masatsugu Minami. Prog. of Theor. Phys., 1979, **62**(4):

6 JIANG ZeHan. Introduction to Topology. Shanghai: Shanghai Press of Sciences and Technology (in Chinese), 1978, 66—

(江泽涵. 拓扑学引论. 上海:上海科学技术出版社, 1978, 66—69)

Unified Model of Electric Monopole and Magnetic Monopole

TANG JuFei[1)]

(*Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039, *China*)

Abstract It is shown that the magnetic monopole and the electric monopole can be generated on an unified model based on the Hopf bundle ($S^3 = S^2 \times S^1$) with the structure group $U(1)$. The connection on the base manifold S^2 is divided into two types, the type of electric monopole and the type of magnetic monopole. The magnetic charge obeys the quantized condition, and the electric monopole is the solution where the magnetic quantum number $n = 0$. The electric monopole and the magnetic monopole have the theoretical identity. They are two different states of one physical object. The time coordinate is introduced by the homotopic shift, and the electric monopole appears in an active model in the Minkowski space. The theory is Lorentz invariant.

Key words magnetic monopole, electric monopole, unified model

---

Received 19 July 1999

1) TANG JuFei (1930—1999), was professor of Graduate school, Chinese Academy of Sciences, Standing vice-president of Graduate School. This paper was completed soon before his death. Following his will, it is published here after passing the approving in memory of him