

变分累积展开方法中确定相变点的新方法*

卢强 李红 陈天仑

(南开大学物理系 天津 300071)

摘要 在计算有限温度 $SU(2)$ 格点规范模型 Polyakov 线的过程中, 考虑到变分累积展开法中有限距离相互作用效应与 Monte Carlo 中的有限体积效应的相似性, 采用了新的方法来确定相变点. 与已有的方法以及 Monte Carlo 模拟给出的结果比较, 新方法给出的结果更接近 Monte Carlo 结果.

关键词 格点规范理论 退禁闭相变 变分累积展开

1 引言

格点规范理论已成为研究规范场不可缺少的方法. 在刚过去的世纪末有许多回顾性的文章总结了这一方向的进展^[1-3]. Monte Carlo 数值模拟方法是研究格点 QCD 的强有力的工具, 20 多年来它已给出了大量有价值的结果. 可至今 QCD 的机制仍不很清楚. 我们认为除了发展 Monte Carlo 模拟计算之外还要发展格点解析理论体系. Monte Carlo 方法相当于数值试验, 其结果可作为解析方法的依据和标准, 而解析方法可给出直观的图像和对理论的深入了解. 变分累积展开方法是一个有效的格点解析方法^[4,5]. 在这篇文章里, 用这种方法计算 Polyakov 线来进一步研究 QCD 中的退禁闭相变^[6], 在主值法的基础上提出了一个新的确定相变点的方法. 在对有限温度 $SU(2)$ 格点规范模型的研究中, 除对 Wilson 标准作用量以外, 也对 Symanzik 改进作用量进行了分析. 与已有的两个常规确定相变点的方法比较, 其结果与 Monte Carlo 更准确地符合.

2 有限温的 $SU(2)$ 规范模型下格点变分累积展开

考虑 D 维点格阵 $\Lambda = (N_t A_t) \times (N_s A_s)^{D-1}$, 其中 $(N_t A_t)$ 是时间方向的长度, $(N_s A_s)^{D-1}$ 是空间体积. 有限温度下, 时间方向会有周期边界条件的限制. 温度为 $T = 1/N_t A_t$, 首先讨论 $N_t = 2$. 变分累积方法中的空间长度 N_s 在理论上是可以无限长的, 而实际上由于受到展开阶数的限制真正的长程相互作用不能计入, 这相当于某种意义

2000-03-13 收稿, 2000-05-17 收修改稿

* 国家自然科学基金的资助(19775024)

下的有限体积效应. 首先, 在 $SU(2)$ 规范模型下, 要用到的作用量如下

$$S = \frac{\beta}{2} \left\{ C_0 \left[\sum_{P_s} \text{tr}(U_{P_s} + U_{P_s}^\dagger) + \sum_{P_t} \text{tr}(U_{P_t} + U_{P_t}^\dagger) \right] + C_1 \left[\sum_{R_s} \text{tr}(U_{R_s} + U_{R_s}^\dagger) + \sum_{R_t} \text{tr}(U_{R_t} + U_{R_t}^\dagger) \right] \right\} \quad (1)$$

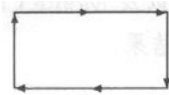
其中

$$\begin{cases} C_0 = 1, C_1 = 0 & \text{Wilson 作用量} \\ C_0 = \frac{5}{3}, C_1 = -\frac{1}{12} & \text{Symanzik 作用量} \end{cases} \quad (2)$$

U_P 表示方块, U_{P_s} 是方块中空间方向链的有序乘积. U_{P_t} 是时间方向链的有序乘积. 而



U_P



U_R

U_R 表示长方块的情况(见图1). 链是 $SU(2)$ 的群元素. $\beta = 4/g^2$.

系统配分函数为

$$Z = \int [dU] e^S = e^{-NF} \quad (3)$$

图1 作用量中的 U_P 和 U_R

其中 $N = N_s^{D-1} N_t$ 是总的格点数, F 是每个点上的

自由能. 周期性边界条件为

$$U^\mu(x, 0) = U^\mu(x, \beta). \quad (4)$$

选取试探作用量为

$$S_0 = J \sum_{\sigma} \text{tr} U_{\sigma} + K \sum_{\tau} \text{tr} U_{\tau}, \quad (5)$$

其中 U_{σ} 和 U_{τ} 也是定义在时间和空间方向上链的 $SU(2)$ 矩阵. J 和 K 是两个变分参数. 相应的试探配分函数 Z_0 为

$$Z_0 = \int [dU] e^{S_0}, \quad (6)$$

将 Z 对 Z_0 作变分累积展开.

$$Z = \int [dU] e^{S-S_0} e^{S_0} = Z_0 \langle e^{S-S_0} \rangle_0 = Z_0 \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S-S_0)^n \rangle_c \right], \quad (7)$$

这样, 任一热力学量, 如 Polyakov 线 $\langle L \rangle$ 可以展开为

$$\langle L \rangle = \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S-S_0)^n L \rangle_c. \quad (8)$$

其中

$$\langle L \rangle \begin{cases} = 0, & \text{禁闭,} \\ \neq 0, & \text{退禁闭} \end{cases} \quad (9)$$

因为 $\langle L \rangle$ 不能被精确地算出, 所以必须截断为有限项

$$\langle L_n \rangle = \langle L \rangle_0 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \langle (S-S_0)^m L \rangle_c. \quad (10)$$

下一步要确定变分参数. 主值法^[7]是最常用的方法. 由不等式 $\langle e^x \rangle_0 \geq \exp \langle x \rangle_0$. 得到

$$\ln Z \geq \ln Z_0 + \langle S - S_0 \rangle_0. \quad (11)$$

由于 $F = -\ln Z/N$, 有

$$F \leq F_{\text{eff}} = F_0 - \langle S - S_0 \rangle_0, \quad (12)$$

经过定规范后(定于 x 轴)

$$F_{\text{eff}} = -(D-2)\ln f(J) - \ln f(K) - \langle S - S_0 \rangle_0, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \langle S - S_0 \rangle_0 = \beta & \left[C_0(D-2)A_2^2B_2^2 + \frac{1}{2}C_0(D-2)(D-3)A_2^4 + C_1(D-2)A_2^4B_2^2 + \right. \\ & C_1(D-2)(D-3)A_2^6 + C_1(D-2)A_2^2B_2^4 + C_0B_2^2 + C_0(D-2)A_2^2 + \\ & \left. C_1B_2^2 + C_1B_2^4 + C_1(D-2)(A_2^4 + A_2^2) \right] + 2(D-2)JA_2 + 2KB_2. \quad (14) \end{aligned}$$

其中 $A_n = I_n(2J)/I_1(2J)$, $B_n = I_n(2K)/I_1(2K)$, $I_n(x)$ 是第 n 阶的修正贝赛尔函数. 由 F_{eff} 的极值条件, 可给出两个关于 J 和 K 的方程.

$$\frac{\delta F_{\text{eff}}}{\delta J} = 0, \quad \frac{\delta F_{\text{eff}}}{\delta K} = 0, \quad (15)$$

具体写为

$$\begin{aligned} J = \beta & [C_0(D-3)A_2^3 + C_0A_2B_2^2 + 3C_1(D-3)A_2^5 + C_0A_2 + \\ & C_1(2A_2^3 + A_2) + 2C_1A_2^3A_2^2 + C_1A_2B_2^4], \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K = \beta & [C_0(D-2)A_2^2B_2 + C_1(D-2)A_2^4B_2 + C_1B_2 + \\ & C_0B_2 + 2C_1(D-2)A_2^2B_2^3 + 2C_1B_2^3]. \quad (17) \end{aligned}$$

实际上, (16)式和(17)式中 $J=K$ 而且 $A_2=B_2$. 那么这两个方程合写为

$$J = \beta [C_0(D-2)A_2^3 + 3C_1(D-2)A_2^5 + (C_1 + C_0)A_2 + 2C_1A_2^3]. \quad (18)$$

此方程有两支解,

$$\begin{cases} J = 0 \\ J = J(\beta). \end{cases} \quad (19)$$

通常确定相变点的方法有两种: A, 由 Polyakov 线开始大于零的 β 值给出. 首先, 把(19)式代入到(10)式中. 取 $J=0$ 时, $\langle L_n \rangle = 0$. 取 $J=J(\beta)$ 时, 得到 n 阶的 Polyakov 线 $\langle L_n(\beta) \rangle$. 根据(9)式, 此线开始大于零时的 β 值为相变点. B, 由自由能最低来定出相变点. 首先, 把方程(19)代入到(13)式中. 取 $J=0$ 时, 有 $F_{\text{eff}}=0$. 取 $J=J(\beta)$ 时, 给出 $F_{\text{eff}}(\beta)$. 由自由能最低, 要求在 $F_{\text{eff}} > 0$ 时取 $J=0$, 而在 $F_{\text{eff}} < 0$ 时取 $J=J(\beta)$. 这样由 $F_{\text{eff}}=0$ 定出 β_0 . 当 $\beta < \beta_0$ 时, 由 $J=0$ 得到 $\langle L_3 \rangle = 0$. 当 $\beta > \beta_0$ 时, 由 $J=J(\beta)$ 得到 $\langle L_3(\beta) \rangle$. 而 β_0 为相变点 (β_0 表示变分累积展开的相变点, 而 β_c 表示 Monte Carlo 的相变点).

以上这两种方法都没有考虑到有限距离相互作用效应. 考虑到这种效应后我们提出了一个新的方法 C. 具体如下: 方程(10)可以写为 β 的展开式

$$\langle L_n \rangle = \langle L_0 \rangle + \sum_{m=1}^{n-1} \beta^m a_m(J). \quad (20)$$

当 n 足够大而且展开收敛时, 有限体积效应可以被忽略. 给定一个 J 值, $\langle L_n \rangle$ 将给出

Polyakov 线的准确解. 可这是不可能的. 当展开到三阶或四阶时, 这种长程相互作用的截断, 相当于某种意义下的有限体积效应. 而 Monte Carlo 实际数据曲线 U (图 2, 3) 在低 β 区与理想拟合 Polyakov 曲线 V 的不同正是由于有限体积效应所至^[8]. 注意到曲线 U 在拟合曲线 V 给出的相变点 β_c 附近有一个拐点, 我们希望展开到三阶的 Polyakov 线 $\langle L_3 \rangle$ 能够反映出 Monte Carlo 曲线 U 这一从凸到凹的变化, 即拐点 Q . 由此来更接近地给出相变点的位置. 但此时要考虑收敛的速度. 变分累计展开的收敛性没有基本的证明, 但在文献[4]中, 已很好地显示出 Wilson 作用量下前三阶展开的 Polyakov 线的收敛性. 为了计算拐点, 根据(20)式把第三阶展开表示为

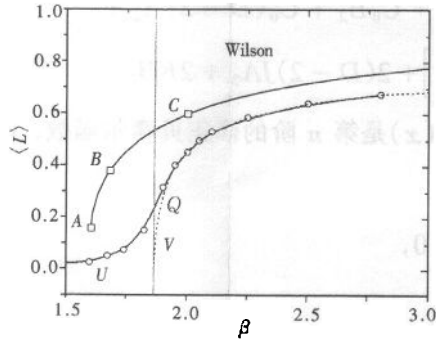


图 2 采用 Wilson 作用量后变分累积展开给出的 Polyakov 线 $\langle L_n \rangle, n=1, 2, 3, 4$ 与 Monte Carlo^[8,9] 的比较
 $N_t=2, A=1.610, B=1.681, C=1.997, \text{---} L_3,$
 $\text{---} \circ \text{---} \text{MC data}, \text{---} \text{---} \text{fit of MC data}, \beta_c = 1.880.$

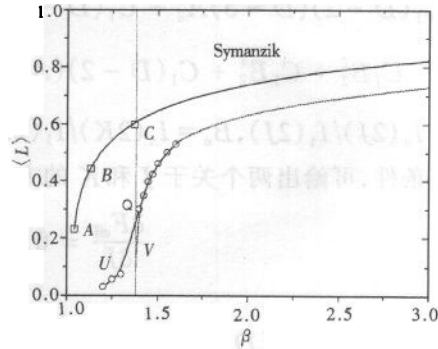


图 3 采用 Symanzik 作用量后变分累积展开给出的 Polyakov 线 $\langle L_n \rangle, n=1, 2, 3$ 与 Monte Carlo^[10,11] 的比较
 $N_t=2, A=1.040, B=1.125, C=1.369, \text{---} L_3, \beta_c = 1.380,$
 $\text{---} \circ \text{---} \text{MC data}, \text{---} \text{---} \text{fit of MC data}.$

$$\langle L_3 \rangle = a(J)\beta^2 + b(J)\beta + c(J), \quad (21)$$

其中 $a(J), b(J), c(J)$ 是变分参数 J 的函数. 这样就可以由

$$\frac{\partial^2 \langle L_3(\beta, J) \rangle}{\partial \beta^2} = 2a(J) = 0. \quad (22)$$

来定出拐点的 J_v 值. 然后根据(18)式来定出相变点 β_v

$$\beta_v = J_v [C_0(D-2)A_2^3 + 3C_1(D-2)A_2^5 + (C_1 + C_0)A_2 + 2C_1A_2^3]^{-1} \quad (23)$$

3 结果与讨论

首先, 我们计算了取 Wilson 作用量时三阶展开的情况. 分别给出了三种方法的结果, 它们分别是图 2 中的 A, B, C 三点. 可以看出 C 点, 即由新方法给出的结果更接近 Monte Carlo 的结果 $\beta_c = 1.880$. 如果想进一步检验就要展开到更高阶. 而这将变得很困难. 原因是展开图的数目将随着展开阶数的增加急剧上升, 如 Symanzik 改进作用量的二阶展开有 4 个图, 三阶有 44 个, 四阶将很难人为给出. 而且每个图的计算量也将增大. 加改进作用量的意义要在 Monte Carlo 模拟中避开类似的情况. 而在变分累积展开中, 采取

Symanzik 作用量的三阶展开相当于 Wilson 作用量的五阶展开,因为二者相互作用的空间距离同为 $4A_s$. 所以我们用 Symanzik 作用量的三阶展开来进一步检验这一新方法的效果.

结果为 $\beta_c = 1.369$ 与 Monte Carlo 结果 $\beta_c = 1.380$ 相比仅差 0.011. 这说明新的方法与 Monte Carlo 给出的结果符合得很好. 进而,我们计算了 $N_\tau = 3, 4$ 的情况. 结果趋势与 $N_\tau = 2$ 的相一致(如表 1). 这可以说明新方法是有效的,变分累积展开方法可以很好地与 Monte Carlo 模拟相一致,是一个有效的格点解析理论.

表 1 采取新方法后变分累积展开给出的相变点 β_c 与 Monte Carlo 的 β_c 的比较(Wilson^[8,9], Symanzik^[10,11])

N_τ	Wilson			Symanzik		
	β_c	β_c	$ \beta_c - \beta_c $	β_c	β_c	$ \beta_c - \beta_c $
2	1.997	1.880	0.117	1.369	1.380	0.011
3	2.408	2.177	0.231	1.631	1.596	0.035
4	2.504	2.299	0.205	1.696	1.699	0.004

有待开展的工作还有:(1)收敛性的改进. 这需要改进试探作用量使其更接近真实作用量.(2)提高 N_τ , 这需要提高展开阶数,但可行性不大,但可以考虑只计算贡献大的连通图,而不局限于四阶或五阶展开. 这类似于 Monte Carlo 模拟中的考虑贡献大的位型.(3)SU(3)规范模型的研究更具有理论意义. 下一步我们计划把这一方法应用到 SU(3)规范理论来进一步研究 QCD 的退禁闭问题.

参考文献(References)

- Hartmut. H. hep-lat/9911400
- Frithjof K. hep-lat/9909006
- LUO Xiang-Qian. HEP & NP, 1999, 23:188(in Chinese)
(罗向前. 高能物理与核物理, 1999, 23:188)
- TAN C I, ZHENG X T. Phys. Rev., 1989, D39:623; HUANG L X, CHEN T L. Commun. Theor. Phys. (Beijing, China), 1995, 23:481
- YANG J M, WAN L D, WU C M. Commun. Theor. Phys. (Beijing, China), 1990, 14:379; LU Q, CHEN T L, Li H. Commun. Theor. Phys. (Beijing, China), 2000, 33:297; CHEN Tan-Lun, SUO Chun-Chuan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1986, 10:158 (in Chinese)
(陈天仑, 索存川. 高能物理与核物理, 1986, 10:158)
- Satz H. Phys. Rep., 1982, 88:349; Svetitsky B. Phys. Rep., 1986, 132:1
- LIU R J, CHEN T L. Commun. Theor. Phys. (Beijing China), 1995, 23:37
- Engels J, Fingberg J, Weber M. Nucl. Phys., 1990, B332:737; Engels J, Fingberg J, Miller D E. Nucl. Phys., 1992, B387:501
- Fingberg J, Heller U, Karsch F. Nucl. Phys., 1993, B392:493
- Curci G, Tripiccion R. Phys. Lett., 1985, B151:145
- Cella G, Curci G, Tripiccion R et al. Phys. Rev., 1994, D49:511

A New Approach about Determining the Phase Transition Point in Variational-Cumulant Expansion*

LU Qiang LI Hong CHEN Tian-Lun

(*Department of Physics, Nankai University, Tianjin 300071, China*)

Abstract Based on Variational-cumulant expansion (VCE), through calculating Polyakov line in the $SU(2)$ gauge model at finite temperature and considering the similarity of finite size interaction in VCE method with the finite volume effect in Monte Carlo (MC) simulation, a new approach is adopted to determine the critical couplings for the deconfinement phase transition. New results of VCE which are close to MC data manifest that new approach is much more effective than the traditional one and show that VCE analysis is consistent with MC simulation.

Key words lattice gauge theory, deconfinement phase transition, variational-cumulant expansion

Received 13 March 2000, Revised 17 May 2000

* Supported by National Natural Science Foundation of China (19775024)