

2 + 1 维格点 QCD 真空波函数的计算*

李洁明

(中山大学物理系 广州 510275)

江俊勤

(广东教育学院物理系 广州 510303)

(中国高等科学技术中心 北京 100080)

摘要 用改进的格点哈密顿量和截断本征方程法计算 2 + 1 维 QCD 真空波函数, 结果显示有良好的标度行为.

关键词 格点 QCD 改进哈密顿量 真空波函数

1 引言

格点规范理论从第一原理出发, 是研究规范场非微扰性质的最可靠方法. 哈密顿量形式的格点规范理论的优点, 在于它既能计算粒子的质量谱又能计算粒子的波函数(这是作用量形式的格点规范理论难以做到的), 而粒子的波函数可用于计算粒子的产生和衰变, 为实验寻找新型粒子(如: 胶球)提供更多有用的物理信息.

对于 $SU(N)$ 格点规范理论, 原始的 Kogut-Susskind 哈密顿量为

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[\sum_{x,i} E_i^a(x) E_i^a(x) - \frac{2}{g^4} \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger) \right], \quad (1)$$

式中 E_i^a 为规范场色电场强, a 为格距, g 为无量纲的耦合常数, 它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$.

(1) 式只含最小 Wilson 圈 $\sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger)$, 它与连续理论哈密顿量之间的有限格距误差为 $O(a^2)$. 由于目前格点计算只能到达中间耦合区(例如, 2 + 1 维 QCD 真空波函数的格点计算只能到达 $1/g^2 = 2$), a 较大, 因而有限格距误差较大, 影响了计算结果的可靠性. 为此, 我们对格点哈密顿量进行了改进^[1,2], 对于改进的 Kogut-Susskind 哈密顿量, 有限格距误差由 $O(a^2)$ 减小到 $O(a^4)$.

真空波函数是研究强子低能物理(胶球质量、胶球波函数……)的基础, 因此, 获得可靠的真空波函数十分重要. 最近, 我们用改进的格点哈密顿量计算了 2 + 1 维 $U(1)$ 和

2000-07-28 收稿

* 国家自然科学基金资助

$SU(2)$ 模型中规范场真空波函数^[3,4]. 本文,进一步用改进的格点哈密顿量计算 2+1 维 QCD 真空波函数.

2 改进格点哈密顿量和截断本征方程

对于格点 QCD,改进的 Kogut-Susskind 哈密顿量可写成^[2]

$$H = \frac{5}{6} \frac{g^2}{2a} \sum_{x,i} \left\{ E_i^a(x) E_i^a(x) + \frac{2}{5} \text{Tr}[\Lambda^a U_i(x) \Lambda^a U_i^\dagger(x)] E_i^a(x) E_i^a(x+i) \right\} - \frac{2}{g^2 a} \sum_{x,i < j} \left\{ \frac{5}{3} P_{ij} - \frac{1}{12} (R_{ij} + R_{ji}) \right\}, \quad (2)$$

式中 Λ^a, Λ^a 为 $SU(3)$ 群的生成元, $U_i(x)$ 为规范群的元素,

$$\sum_{x,i < j} P_{ij} = \frac{1}{2} \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger) = \frac{1}{2} \left(\square + \text{h.c.} \right),$$

$$\sum_{x,i < j} R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\square + \text{h.c.} \right), \quad \sum_{x,i < j} R_{ji} = \frac{1}{2} \left(\square + \text{h.c.} \right).$$

$$\text{取真空态为 } |\Omega\rangle = \exp(R) |0\rangle, \quad (3)$$

式中 $|0\rangle$ 为裸真空,由 $E_i^a(x)|0\rangle=0$ 确定, R 由 Wilson 圈组成,可按圈图的阶展开

$$R = R_1 + R_2 + \dots \quad (4)$$

将(2)式代入 $H|\Omega\rangle = \epsilon_0 |\Omega\rangle$, 得 N 阶截断本征方程

$$\left[E_i^a(x), \left[E_i^a(x), \sum_{k=1}^N R_k \right] \right] + \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda^a U_i(x) \Lambda^a U_i^\dagger(x)) \left[E_i^a(x), \left[E_i^a(x+i), \sum_{k=1}^N R_k \right] \right] + \sum_{n_1+n_2 \leq N} \left\{ \left[E_i^a(x), \sum_{k=1}^{n_1} R_k \right] \left[E_i^a(x), \sum_{l=1}^{n_2} R_l \right] + \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda^a U_i(x) \Lambda^a U_i^\dagger(x)) \left[E_i^a(x), \sum_{k=1}^{n_1} R_k \right] \cdot \left[E_i^a(x+i), \sum_{l=1}^{n_2} R_l \right] \right\} - \frac{2}{9} \beta^2 \sum_{x,i < j} \left\{ P_{ij} - \frac{1}{20} (R_{ij} + R_{ji}) \right\} = \frac{6}{5} w_0, \quad (5)$$

式中 $\beta = 6/g^2$, w_0 为真空能量,定义为 $w_0 = \frac{2a}{g^2} \epsilon_0$.

3 真空波函数的计算

$$\text{取一阶图为 } R_1 = \frac{C_1}{2} \sum_p (\text{Tr} U_p + \text{Tr} U_p^\dagger) = \frac{C_1}{2} \left(\square + \text{h.c.} \right). \quad (6a)$$

由 R_1 和(5)式的对易子,可产生二阶 Wilson 圈:

$$R_2 = \left(C_2 \square + C_3 \square + C_4 \square + C_5 \square + C_6 \square + C_7 \square + C_8 \square + C_9 \square + C_{10} \square + C_{11} \square + \text{h.c.} \right) / 2 \quad (6b)$$

再由 R_2 和(5)式的对易子,可产生三阶 Wilson 圈(84 个)…….

由于低能谱主要起源于长波激发,因此用格点方法研究规范场真空态的长波行为.对于 2+1 维 QCD,在连续极限下,长波行为真空波函数可写成

$$|\Omega\rangle = N \exp \left\{ -\mu_0 \iint \text{Tr} F_{12}^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 - \mu_2 \iint \text{Tr} [D_i F_{12}(x_0, y_0)]^2 dx_0 dy_0 + \text{高阶项} \right\}, \quad (7)$$

式中 $F_{12}(x_0, y_0)$ 为场强张量, D_1, D_2 为协变导数,展开系数 μ_0 和 μ_2 的表达式可以通过研究 Wilson 圈图的连续极限行为求得,文献[4]导出了 2+1 维 $SU(2)$ 规范场真空波函数中 μ_0 和 μ_2 的表达式,它对于 2+1 维 QCD 仍成立:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{g^4}{2e^2} \sum_n C_n (N_1 - N_2)^2 \\ \mu_2 &= \frac{g^8}{e^6} \sum_n C_n \left\{ -\frac{1}{24} (N_1 - N_2)^2 + \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} (N_1 - N_2) \left[\sum_{l=1}^{N_1} (x_l^2 + y_l^2) - \sum_{m=1}^{N_2} (\tilde{x}_m^2 + \tilde{y}_m^2) \right] \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

式中 $N_1(N_2)$ 为圈图所含 $U_p(U_p^*)$ 的数目, (x_l, y_l) 为第 l 个 U_p 的中心坐标, $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)$ 为第 m 个 U_p^* 的中心坐标.

把(6),(4)式代入(5)式,得 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ 所满足的非线性方程组,解方程组得 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ 与 β 的关系,再代入(8)式,可得 μ_0 和 μ_2 与 β 的关系.

4 结果与讨论

2+1 维规范理论是超可重整化的, μ_0 和 μ_2 有如下标度行为^[5]

$$e^2 \mu_0 \rightarrow \text{const}, \quad e^6 \mu_2 \rightarrow \text{const}. \quad (9)$$

取至 3 阶截断时,求得 $e^2 \mu_0$ 和 $e^6 \mu_2$ 与 β 的关系,如图 1 所示;在求得 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ 与 β 的关系之后,也可求得真空能量 w_0 与 β 的关系,如图 2 所示.

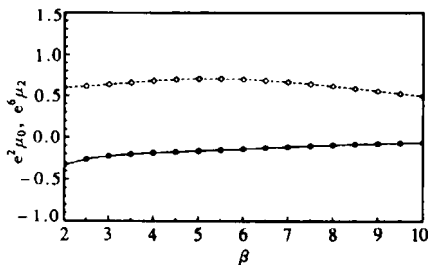


图 1 $e^2 \mu_0, e^6 \mu_2$ 与 β 的关系
 $e^2 \mu_0$, ——— $e^6 \mu_2$.

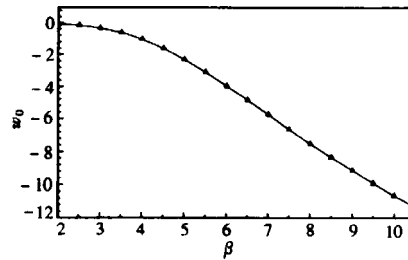


图 2 真空能量 w_0 与 β 的关系

由图 1 可见,在 $2 \leq \beta \leq 10$ 范围内, $e^2 \mu_0$ 和 $e^6 \mu_2$ 都呈现出较好的标度行为.

至此,我们已经计算了 $2+1$ 维 $U(1)$, $SU(2)$ 模型中格点规范场真空波函数和 $2+1$ 维格点 QCD 真空波函数,都得到了较好的结果,由于使用了较小有限格距误差(为 $O(a^4)$)的改进格点哈密顿量,这些结果的可靠性较高. 进一步的工作是研究收敛性以及计算胶球质量、胶球波函数.

参考文献 (References)

- 1 LUO X Q, CHEN Qi-Zhou, XU Guo-Cai et al. Phys. Rev., 1994, **D50**:501;
JIANG Jun-Qin, LUO Xiang-Qian et al. Phys. Rev., 1999, **D60**:014501
- 2 LUO X Q, GUO S H, Kröger H et al. Phys. Rev., 1999, **D59**:034503
- 3 JIANG Jun-Qin, LUO Xiang-Qian, GUO Shuo-Hong et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(12):1152(in Chinese)
(江俊勤, 罗向前, 郭硕鸿等. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12):1152)
- 4 JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(10):922 (in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理, 2000, **24**(10):922)
- 5 CHEN Qi-Zhou, FANG Xi-Yan, GUO Shuo-Hong. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1995, **19**(5):398(in Chinese)
(陈启洲, 方锡岩, 郭硕鸿. 高能物理与核物理, 1995, **19**(5):398)

Calculation of the Vacuum Wave Function for $(2+1)$ Dimensional Lattice QCD*

LI Jie-Ming

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

JIANG Jun-Qin

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

(CCAST (World Laboratory), Beijing 100080, China)

Abstract Using the improved lattice Hamiltonian and the truncated eigenvalue equation method, we compute the vacuum wave function of $(2+1)$ -dimensional QCD. The numerical results display good scaling behavior.

Key words lattice QCD, improved Hamiltonian, vacuum wave function

Received 28 July 2000

* Supported by National Natural Science Foundation of China