

叠加 qs 相干态的非经典性质*

陈昌远 刘友文

(盐城师范学院物理系 盐城 224002)

摘要 构造了叠加 qs 相干态,并研究了它的压缩性质、反聚束效应等非经典性质.数值计算了叠加系数和形变参数 q 与 s 对非经典性质的影响.奇偶 qs 相干态的有关结果作为特例包含在本文的一般结论之中

关键词 叠加 qs 相干态 压缩性质 反聚束效应

1 引言

近年来,量子群和量子代数的研究引起了人们广泛的注意,其中令人感兴趣的是 qs 形变谐振子和 qs 相干态及其在量子光学中的应用. qs 形变谐振子和 qs 相干态是 Chakrabarti^[1] 在 1991 年最先提出的并被其他作者所讨论^[2],后来周焕强^[3] 等人构造了 \hat{a}_q^2 的本征态即偶奇 qs 相干态,王继锁^[4] 等人研究了偶奇 qs 相干态的非经典性质.文献[5—7]构造了 qs 湮没算符高次幂 \hat{a}_q^k 的本征态并讨论了它的压缩性质、反聚束效应等非经典性质.我们在最近的工作中^[8],构造了正交 qs 相干态,并数值计算了形变参数 q 和 s 对非经典性质的影响.

由于奇偶相干态可表示为两个位相相反的相干态的叠加,而后者又是相干态的叠加态的特例^[9].文献[10]将上述理论应用到 q 相干态中,本文进一步将上述理论推广到 qs 相干态中,目的在于构造以奇偶 qs 相干态为特例的叠加 qs 相干态,并用数值计算的方法讨论它所具有的非经典特性,阐明叠加系数、形变参数 q 和 s 对压缩性质和反聚束效应的影响.结果表明,这些非经典性质明显地受到叠加系数和形变参数 q 与 s 的影响,但它的非经典性质与正交 qs 相干态的非经典性质^[8] 又有明显的不同,而奇偶 qs 相干态的有关结果则作为特例包含在本文的一般结论之中.

2 叠加 qs 相干态

qs 形变谐振子的产生算符 \hat{a}_q^+ 和湮没算符 \hat{a}_q 满足如下的对易关系^[1-7]

2000-10-11 收稿

* 江苏省教育厅自然科学基金资助

$$\hat{a}_{qs} \hat{a}_{qs}^+ - s^{-1} q \hat{a}_{qs}^+ \hat{a}_{qs} = (sq)^{-\hat{N}_{qs}}, \quad (1)$$

$$[\hat{N}_{qs}, \hat{a}_{qs}] = -\hat{a}_{qs}, \quad (2)$$

$$[\hat{N}_{qs}, \hat{a}_{qs}^+] = \hat{a}_{qs}^+, \quad (3)$$

式中 \hat{N}_{qs} 为粒子数算符, 即

$$\hat{N}_{qs} = \hat{a}_{qs}^+ \hat{a}_{qs}.$$

在 Fock 空间 $\left\{ |n\rangle_{qs} = \frac{(\hat{a}_{qs}^+)^n}{\sqrt{[n]_{qs}!}} |0\rangle_{qs}, n=0, 1, 2, \dots \right\}$ 内, 显然有

$$\hat{a}_{qs}^+ |n\rangle_{qs} = \sqrt{[n+1]_{qs}} |n+1\rangle_{qs}, \quad (5)$$

$$\hat{a}_{qs} |n\rangle_{qs} = \sqrt{[n]_{qs}} |n-1\rangle_{qs}, \quad (6)$$

$$\hat{a}_{qs} |0\rangle_{qs} = 0. \quad (7)$$

式中

$$[n]_{qs}! = [n]_{qs} [n-1]_{qs} \cdots [1]_{qs},$$

$$[n]_{qs} = s^{1-n} \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

qs 相干态定义为湮没算符 \hat{a}_{qs} 的本征态

$$\hat{a}_{qs} |\alpha\rangle_{qs} = \alpha |\alpha\rangle_{qs}, \quad (10)$$

$$|\alpha\rangle_{qs} = \{e_q^{|\alpha|^2}\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]_{qs}!}} |n\rangle_{qs},$$

式中 $e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{qs}!}$ 为 qs 指数函数. qs 相干态归一但不正交, 满足

$${}_qs \langle \alpha | \beta \rangle_{qs} = e_q^{\alpha^* \beta} (e_q^{|\alpha|^2})^{-\frac{1}{2}} (e_q^{|\beta|^2})^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

由(8)和(9)式可知, 当 $q \rightarrow 1$ 和 $s \rightarrow 1$ 时, (11)式退化为通常的相干态的表达形式, (12)式退化为 Glauber 公式.

仿照文献[9—12]的做法, 定义叠加 qs 相干态为

$$|\alpha, \theta\rangle_{qs} = C [|\alpha\rangle_{qs} + \exp(i\theta) |-\alpha\rangle_{qs}], \quad (13)$$

式中 C 为归一化常数, 由(12)式可得

$$C = \{2[1 + \cos \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}]\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

把(11)和(14)式代入(13)式, 并取 $\theta = 0$, 则得

$$|\alpha, 0\rangle_{qs} = \{2[1 + e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}]\}^{-\frac{1}{2}} \left[(e_q^{|\alpha|^2})^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]_{qs}!}} |n\rangle_{qs} + \right.$$

$$\left. (e_q^{|\alpha|^2})^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{[n]_{qs}!}} |n\rangle_{qs} \right] =$$

$$(\cosh_{qs} |\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_{qs}!}} |2n\rangle_{qs} = |\alpha\rangle_{qs}^{\circ},$$

式中 $\cosh_{qs} x$ 为 qs 双曲余弦函数. 由此可知, 偶 qs 相干态是叠加 qs 相干态中 $\theta = 0$ 的特例. 同理可证, 奇 qs 相干态是叠加 qs 相干态中 $\theta = \pi$ 的特例, 即有 $|\alpha, \pi\rangle_{qs} = |\alpha\rangle_{qs}^{\circ}$.

3 叠加 qs 相干态的压缩性质

类似于通常单模电磁场压缩的定义,人们引入了 qs 电磁场的 qs 压缩概念^[4-6](以下简称压缩). qs 电磁场的两个正交分量由 qs 产生算符 \hat{a}_q^\dagger 和 qs 湮没算符 \hat{a}_q 表示为

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a}_q^\dagger + \hat{a}_q), \quad \hat{w}_2 = \frac{i}{2}(\hat{a}_q^\dagger - \hat{a}_q), \quad (16)$$

容易证明,算符 \hat{w}_1 和 \hat{w}_2 满足如下的对易关系和测不准关系:

$$[\hat{w}_1, \hat{w}_2] = \frac{i}{2}[\hat{a}_q, \hat{a}_q^\dagger], \quad (17)$$

$$\langle (\Delta \hat{w}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{w}_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{16} \langle [\hat{a}_q, \hat{a}_q^\dagger] \rangle^2. \quad (18)$$

若

$$\langle (\Delta \hat{w}_i)^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle [\hat{a}_q, \hat{a}_q^\dagger] \rangle < 0, \quad (i = 1, 2) \quad (19)$$

成立,则称 \hat{w}_i 分量存在 qs 压缩.

由于

$${}_q \langle \alpha, \theta | \hat{a}_q | \alpha, \theta \rangle_q = -i2\alpha C^2 \sin \theta e^{-|\alpha|^2} (e^{|\alpha|^2})^{-1}, \quad (20a)$$

$${}_q \langle \alpha, \theta | \hat{a}_q^2 | \alpha, \theta \rangle_q = \alpha^2, \quad (20b)$$

$${}_q \langle \alpha, \theta | \hat{a}_q^\dagger | \alpha, \theta \rangle_q = i2\alpha^* C^2 \sin \theta e^{-|\alpha|^2} (e^{|\alpha|^2})^{-1}, \quad (21a)$$

$${}_q \langle \alpha, \theta | \hat{a}_q^{\dagger 2} | \alpha, \theta \rangle_q = (\alpha^*)^2, \quad (21b)$$

$${}_q \langle \alpha, \theta | \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q | \alpha, \theta \rangle_q = 2|\alpha|^2 C^2 [1 - \cos \theta e^{-|\alpha|^2} (e^{|\alpha|^2})^{-1}], \quad (22a)$$

$${}_q \langle \alpha, \theta | \hat{a}_q^{\dagger 2} \hat{a}_q^2 | \alpha, \theta \rangle_q = |\alpha|^4. \quad (22b)$$

把(20), (21), (22)式以及(14)式代入(19)式得

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{w}_i)^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle [\hat{a}_q, \hat{a}_q^\dagger] \rangle = \\ \frac{1}{2} |\alpha|^2 (1 + A) (\pm \cos 2\varphi + B), \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$A = \left(\frac{\sin \theta e^{-|\alpha|^2} (e^{|\alpha|^2})^{-1}}{1 + \cos \theta e^{-|\alpha|^2} (e^{|\alpha|^2})^{-1}} \right)^2 \quad (24)$$

$$B = \frac{1 - (e^{-|\alpha|^2})^2 (e^{|\alpha|^2})^{-2}}{1 + (e^{-|\alpha|^2})^2 (e^{|\alpha|^2})^{-2} + 2\cos \theta e^{-|\alpha|^2} (e^{|\alpha|^2})^{-1}}, \quad (25)$$

φ 为 α 的辐角, 即有 $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$; “+”对应于 $i = 1$, “-”对应于 $i = 2$ (下同). 因为 A 为正值, 所以由(23)式可知, 若 $B < 1$, 只要适当地选择 φ , 则叠加 qs 相干态存在压缩效应.

因 qs 指数函数的复杂性, 需数值计算 B 的值. 图 1 分别给出 $s = 3, q = 0.5, 0.3, 0.1$

3 种情况下(因用 q^{-1} 替代 q , $[n]_q$ 不变, 因此只需考虑 q 从 0 到 1 的变化), B 随 $|\alpha|^2$ 的变化曲线, 图 2 分别给出 $q = 0.3, s = 1, 5, 20$ 三种情况下, B 随 $|\alpha|^2$ 的变化曲线. 由 (23) 式和图 1、图 2 可知: 虽然对所有的 θ , 选取适当的 φ , 叠加 qs 相干态在 $|\alpha|^2$ 取不同值的范围内均可表现出压缩效应, 但 θ 的取值不同, 压缩深度不同, 在 θ 的取值范围 0 到 π 中, θ 越靠近 $\pi/2$, 压缩越不明显. 而形变参数 q 和 s 的引入, 使得 B 出现振荡, $|\alpha|^2$ 越大, 振荡的周期越长, 但 θ 的取值并不影响振荡的周期. 然而当 s 一定时, q 越小, 振荡的幅度越大, 周期越长; 当 q 一定时, s 越大, 振荡的幅度也越大, 周期也越长. 也就是说, q 越小, s 越大, 叠加 qs 相干态的压缩效应越明显. 与此形成明显对比的是, 正交 qs 相干态是不存压缩效应的^[8]. 当 $\theta = 0$ 时, $A = 0, B = \tanh_q |\alpha|^2$, 于是 (23) 式退化为偶 qs 相干态的压缩情况^[3,4]

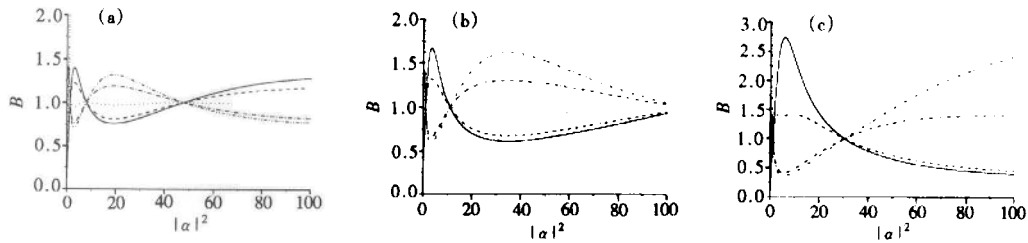


图 1 $s = 3$ 时, B 随 $|\alpha|^2$ 的变化曲线

(a) $q = 0.5$; (b) $q = 0.3$; (c) $q = 0.1$.

实线、虚线、点线、虚点线和虚点线点线分别对应于 $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

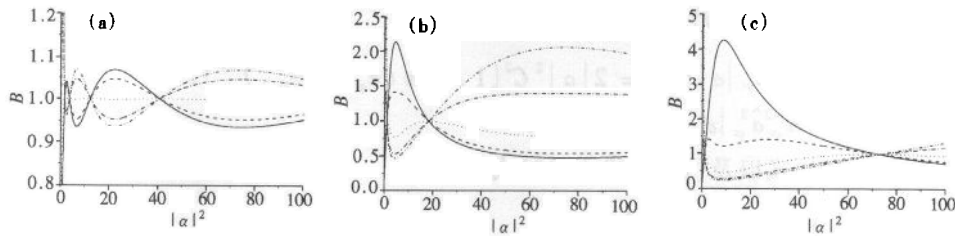


图 2 $q = 0.3$ 时, B 随 $|\alpha|^2$ 的变化曲线

(a) $s = 1$; (b) $s = 5$; (c) $s = 20$.

实线、虚线、点线、虚点线和虚点线点线分别对应于 $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

$$\langle (\Delta \hat{w}_i)^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle [\hat{a}_q, \hat{a}_q^\dagger] \rangle = \frac{1}{2} |\alpha|^2 (\pm \cos \varphi + \tanh_q |\alpha|^2) \quad (i = 1, 2), \quad (26)$$

当 $\theta = \pi, A = 0, B = \coth_q |\alpha|^2$, 于是 (23) 式退化为奇 qs 相干态的压缩情况^[3,4]

$$\langle (\Delta \hat{w}_i)^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle [\hat{a}_q, \hat{a}_q^\dagger] \rangle = \frac{1}{2} |\alpha|^2 (\pm \cos \varphi + \coth_q |\alpha|^2) \quad (i = 1, 2), \quad (27)$$

由此可知, 叠加 qs 相干态的压缩情况包括了偶奇 qs 相干态的压缩, 它们的 B 分别对应于图 1 和图 2 中的实线和虚点点线. 也就是说, 本文的结论具有一般性, 偶奇 qs 相干态的有关结果作为特例包含在本文的一般结论之中.

4 叠加 qs 相干态的反聚束效应

对于通常的电磁场, 若归一化的二阶相关函数 $g^{(2)}(0) < 1$, 则称电磁场呈现反聚束效应. 类似地, 对于 qs 电磁场, 人们引入其二阶相关函数^[3-6]为

$$g_{qs}^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}_{qs}^{+2} \hat{a}_{qs}^2 \rangle_{qs}}{(\langle \hat{a}_{qs}^+ \hat{a}_{qs} \rangle_{qs})^2}, \tag{28}$$

对于叠加 qs 相干态, 由(14)和(22)式得

$$g_{qs}^{(2)}(0) = \left[\frac{1 + \cos \theta e_{qs}^{-|\alpha|^2} (e_{qs}^{|\alpha|^2})^{-1}}{1 - \cos \theta e_{qs}^{-|\alpha|^2} (e_{qs}^{|\alpha|^2})^{-1}} \right]^2. \tag{29}$$

数值计算的 $g_{qs}^{(2)}(0)$ 随形变参数 q 和 s 以及与叠加系数 θ 之间的关系, 如图 3 和图 4 所示. 由(29)式和图 3、图 4 可知: 对所有的 θ ($\theta = \pi/2$ 除外), 叠加 qs 相干态在 $|\alpha|^2$ 取不同值的范围内均可表现出反聚束效应, 在 θ 的取值范围 0 到 π 中, θ 越靠近 0 和 π 反聚束效应越明显. 而形变参数 q 和 s 的引入, 使得 $g_{qs}^{(2)}(0)$ 出现振荡, $|\alpha|^2$ 越大, 振荡的周期越长. 当 s 一定时, q 越小, 振荡的幅度越大, 周期越长; 当 q 一定时, s 越大, 振荡的幅度也越大, 周期也越长. 也就是说, q 越小, s 越大, 叠加 qs 相干态的反聚束效应越明显. 当 $\theta = 0, \pi$ 时, (29)式退化为

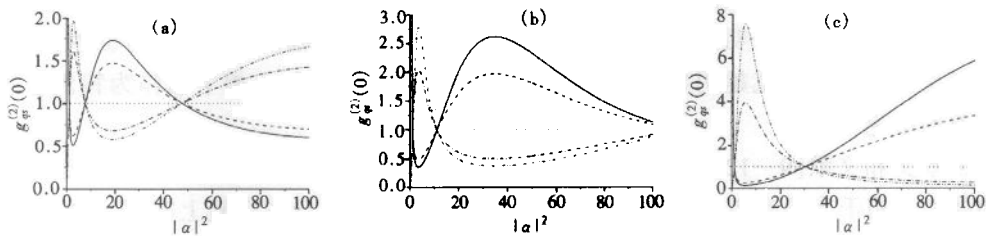


图 3 $s = 3$ 时, $g_{qs}^{(2)}(0)$ 随 $|\alpha|^2$ 的变化曲线

(a) $q = 0.5$; (b) $q = 0.3$; (c) $q = 0.1$.

实线、虚线、点线、虚点线和虚点点线分别对应于 $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

$$g_{qs}^{(2)} = \begin{cases} \coth_{qs} |\alpha|^2 & \theta = 0 \\ \tanh_{qs} |\alpha|^2 & \theta = \pi \end{cases}, \tag{30}$$

这就回到了人们最初对偶奇 qs 相干态所得到的结果^[3,4]. 这时 $g_{qs}^{(2)}(0)$ 的变化对应于图 3 和图 4 中的实线和虚点点线. 也就是说, 本文的结论具有一般性, 偶奇 qs 相干态的相关结果作为特例包含在本文的一般结论之中. 当 $\theta = \pi/2$ 时, $g_{qs}^{(2)} = 1$, 叠加 qs 相干态的反聚束效应消失, 这时 $g_{qs}^{(2)}(0)$ 的变化如图 3 和图 4 中的点线所示. 与此相对比的是, 正交 qs 相干态虽然有反聚束效应存在^[8], 但它的变化关系与叠加 qs 相干态的反聚束效应是不一

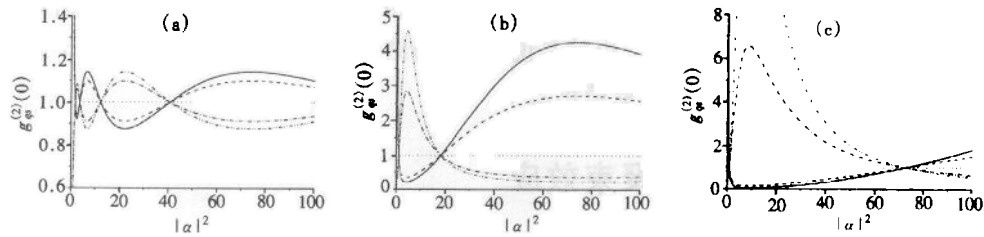


图 4 $q = 0.3$ 时, $g_w^{(2)}(0)$ 随 $|\alpha|^2$ 的变化曲线

(a) $s = 1$; (b) $s = 5$; (c) $s = 20$.

实线、虚线、点线、虚点线和虚点线分别对应于 $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

样的,二者之间有着明显的差异.

5 结论

本文把叠加态的概念由普通的相干态推广到了 qs 相干态,构造出了叠加 qs 相干态. 用数值计算方法研究了它的压缩性质和反聚束效应,阐明了压缩性质和反聚束效应与叠加系数 θ 和形变参数 q, s 间的关系. 计算表明,只要适当地选取其参数值,叠加 qs 相干态均表现出压缩性质和反聚束效应,而且叠加系数 θ 和形变参数 q 与 s 对压缩性质和反聚束效应的强度以及压缩性质和反聚束效应所对应的 $|\alpha|^2$ 的取值范围有着十分明显的影响. 具体表现为:在 θ 的取值范围 0 到 π 中, θ 越靠近 0 和 π 压缩性质和反聚束效应就越明显, θ 越靠近 $\pi/2$, 压缩性质和反聚束效应就越不明显,以致于消失. 也就是说, θ 的取值对振荡的幅度有着明显的影响,但对振荡的周期没有影响. 而形变参数 q 与 s 对振荡的幅度和周期都有十分明显的影响, q 越小, s 越大,振荡的幅度越大,周期也越长,压缩性质和反聚束效应也就越明显. 本文的结论具有普遍性,奇偶 qs 相干态作为特例包含在这普遍的结论之中.

由本文和文献[9—12]的讨论可知,双参数的叠加 qs 相干态比通常的相干态的叠加态和叠加 q 相干态具有更广泛的物理内涵,所以这种体系一旦在实验上实现,人们便可通过分别控制参数 q, s 以及 θ 来实现控制光场的某些量子统计性质. 因此这种体系有着潜在的重要应用前景,值得人们深入研究.

另外须要指出的是,叠加 qs 相干态和正交 qs 相干态虽然都是 \hat{a}_q^2 的本征态,但它们的非经典性质有着十分明显的差别,正交 qs 相干态仅有反聚束效应出现,而无压缩效应,但叠加 qs 相干态均有压缩性质和反聚束效应等非经典性质存在. 而奇偶 qs 相干态则是叠加 qs 相干态中 $\theta = 0$ 和 π 时的特例.

参考文献 (References)

- 1 Chakrabarti R, Jagannathan R. *J. Phys.*, 1991, **A24**(3):L711—L718
- 2 Jing S. *Mod. Phys. Lett.*, 1993, **A8**(2):543—547
- 3 ZHOU Huan-Qiang, HE Jing-Song, ZHANG Xin-Ming. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 1995, **19**(3):251—257(in Chinese)

- (周焕强, 贺劲松, 张新明. 高能物理与核物理, 1995, 19(3): 251—257)
- 4 WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong, ZHAO Ming-Jian. Acta Optica Sinica, 1997, 17(3): 293—297 (in Chinese)
(王继锁, 孙长勇, 赵铭健. 光学学报, 1997, 17(3): 293—297)
- 5 WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong, TENG Ai-ping. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1997, 21(9): 793—800 (in Chinese)
(王继锁, 孙长勇, 滕爱萍. 高能物理与核物理, 1997, 21(9): 793—800)
- 6 HE Jin-Yu, WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong. Acta Sinica Quantum Optica, 1997, 3(4): 199—204 (in Chinese)
(贺金玉, 王继锁, 孙长勇. 量子光学学报, 1997, 3(4): 199—204)
- 7 WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong. Commun. Theor. Phys., 1997, 27(4): 443—448
- 8 CHEN Chang-Yuan, LIU You-Wen. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, 25(3): 193 (in Chinese)
(陈昌远, 刘友文. 高能物理与核物理, 2001, 25(3): 193)
- 9 Buzek V, Vidiella-Barranco A, Knight P I et al. Phys. Rev., 1992, A45(9): 6570—6585
- 10 LIU You-Wen, CHEN Chang-Yuan. Acta Optica Sinica, 1999, 19(11): 1459—1463 (in Chinese)
(刘友文, 陈昌远. 光学学报, 1999, 19(11): 1459—1463)
- 11 BAN M. Phys. Lett., 1994, A193(2): 121—125
- 12 CHEN Chang-Yuan, LIU You-Wen. Acta Photonica Sinica, 1999, 28(3): 198—201 (in Chinese)
(陈昌远, 刘友文. 光子学报, 1999, 28(3): 198—201)

Nonclassical Properties of the Superposition of the qs -Coherent State*

CHEN Chang-Yuan LIU You-Wen

(Department of Physics, Yancheng Teachers' College, Yancheng 224002, China)

Abstract In this paper, the superposition of the qs -coherent states is constructed, and its nonclassical properties such as squeezing property, antibunching effect are studied. The effects of the superposition coefficient and deformed parameter q and s variables on these nonclassical properties are discussed by making use of numerical calculation. The relevant results of the even and odd qs -coherent states, as special cases, are contained in more general conclusion of this paper.

Key words superposition of the qs -coherent state, squeezing property, antibunching effect

Received 11 October 2000

* Supported by Natural Science Foundation of the Education Department of Jiangsu Province