

sl 玻色子体系在 $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ 过渡区的严格解*

张鑫 潘峰

(辽宁师范大学物理系 大连 116029)

摘要 利用无穷维李代数方法得到了相互作用 sl 玻色子体系在 $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ 过渡区的能谱和波函数的严格解. 给出了该系统 Bethe 假定方程的数值解法.

关键词 Bethe ansatz 方法 $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ 过渡区 严格解

1 引言

众所周知,许多物理系统至少都可近似地用相互作用玻色子来描述. 例如,具有凝聚效应的玻色气体^[1,2],原子核的低能结构模型^[3-5],分子结构模型^[6-8]等等,都是其典型代表. 原子核的 sd 相互作用玻色子模型是把原子核中满壳层外的价核子对近似地看作玻色子,并仅考虑 s 和 d 玻色子而建立起来的,该模型的哈密顿量具有 $U(6)$ 对称性. 一般在玻色子数守恒的前提下,由 s 和 $l(l=p, d, f, \dots)$ 玻色子算符所构造模型的最大对称群为 $U(2l+2)$. 在仅考虑单体和两体相互作用和角动量守恒的条件下,该模型的哈密顿量可用 $U(2l+2)$ 按各种可能约化到 $O(3)$ 的途径中所包含各子群的一阶和二阶 Casimir 算子的线性组合来表示

$$\hat{H} = A_1 \hat{C}_1(U(2l+1)) + A_2 \hat{C}_2(U(2l+1)) + A_3 \hat{C}_2(O(2l+2)) + \dots + B \hat{C}_2(O(2l+1)) + C \hat{C}_2(O(3)). \quad (1.1)$$

本文将仅限于讨论 $U(2l+2)$ 按 $O(2l+2)$ 或 $U(2l+1)$ 约化到 $O(3)$ 的情况,而不考虑在(1.1)中没有明显写出的其他项. 所以,当 $A_3 = 0$ 时,(1.1)式在 $U(2l+2) \supset U(2l+1) \supset O(2l+1) \supset O(3)$ 的基底下是严格对角化了的;而当 $A_1 = A_2 = 0$ 时,则在另一条群链 $U(2l+2) \supset O(2l+2) \supset O(2l+1) \supset O(3)$ 的基底下是对角化了的. 这两种特殊情形分别被称为 $U(2l+1)$ 和 $O(2l+2)$ 极限,而其他参数取值情形则可看作是介于这两种极限的过渡区域. 显然在过渡区,对(1.1)式进行严格求解是不容易的. 当组态空间较大时,对(1.1)的对角化就更为困难.

2001-12-24 收稿

* 国家自然科学基金(10175031)和辽宁省自然科学基金(2001101053)资助

最近,文献[9]指出,人们可以通过无穷维李代数方法对原子核的 sd 相互作用玻色子模型中的 $U(5) \leftrightarrow O(6)$ 过渡区进行严格求解,而使 Casten 三角形的一条边也成为严格可解区^[10]. 本文就是试图将这一方法推广到 sl 玻色子体系的一般情况,从而来研究相应体系在 $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ 过渡区的严格解. 需要指出, $l=1$ 情形对应的是 Iachello 等人所提出的振子(Vibron)模型^[6-8],该模型不但能用于描述原子核的 α 集团激发模式^[11],而且还是描述双原子和多原子分子振动和转动模式的重要模型^[6-8]. 以前利用振子模型对原子核的 α 集团激发模式和分子振动和转动模式的研究中仅讨论了其极限情形下的解和应用. 显然,利用过渡区的结果可对这些物理问题进行更准确的描述.

第 2 节,将引入无中心扩张项的 $\widehat{SU}(1,1)$ 无穷维李代数技术来对角化哈氏量(1.1),并导出其解的 Bethe 假定方程. 第 3 节,讨论该系统 Bethe 假定方程的数值解法.

2 $\widehat{SU}(1,1)$ 代数和严格解

首先引入 $SU(1,1)$ 代数,其生成元为 $S^{\nu} (\nu=0, \pm)$, 它们满足如下的对易关系:

$$[S^0, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}, [S^+, S^-] = -2S^0. \quad (2.1)$$

$SU(1,1)$ 的 Casimir 算符表为

$$\hat{C}_2(SU(1,1)) = S^0(S^0 - 1) - S^+ S^-. \quad (2.2)$$

用 $|\kappa\mu\rangle$ 表示 $SU(1,1)$ 不可约表示的基矢,其中 κ 是任意正实数, $\mu = \kappa, \kappa+1, \dots$, 有

$$\hat{C}_2(SU(1,1))|\kappa\mu\rangle = \kappa(\kappa-1)|\kappa\mu\rangle, S^0|\kappa\mu\rangle = \mu|\kappa\mu\rangle. \quad (2.3)$$

我们知道, $U(2l+1) \supset O(2l+1)$ 和 $O(2l+2) \supset O(2l+1)$ 的基分别是 $SU^l(1,1) \supset U(1)$ 和 $SU^l(1,1) \supset U(1)$ 的基. 它们之间的互补关系在下面给出. 即对于 $U(2l+1) \supset O(2l+1)$, 有

$$|Nn_1\nu n_3 LM\rangle = \left| N, \kappa^1 = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right), \mu^1 = \frac{1}{2} \left(n_1 + \frac{2l+1}{2} \right), n_3 LM \right\rangle, \quad (2.4)$$

这里 N, n_1, ν, L 和 M 分别是 $U(2l+2), U(2l+1), O(2l+1), O(3)$ 和 $O(2)$ 的量子数, n_3 是在 $O(2l+1) \downarrow O(3)$ 约化中需要的附加量子数, κ^1 和 μ^1 分别是 $SU^l(1,1)$ 和 $U(1)$ 的量子数.

$SU^l(1,1)$ 的生成元可用 l 玻色子代数生成,即

$$S^+(l) = \frac{1}{2}(l^{\dagger} \cdot l^{\dagger}), S^-(l) = \frac{1}{2}(\tilde{l} \cdot \tilde{l}), S^0(l) = \frac{1}{4} \sum_m (l_m^{\dagger} l_m + l_m \tilde{l}_m), \quad (2.5)$$

则 $SU^l(1,1)$ 的 Casimir 算符表为

$$\hat{C}_2(SU^l(1,1)) = S^0(l)(S^0(l) - 1) - S^+(l)S^-(l). \quad (2.6)$$

这样,得到它与 $O(2l+1)$ 的 Casimir 算符的关系为

$$\hat{C}_2(SU^l(1,1)) = \frac{1}{4} \hat{C}_2(O(2l+1)) + \frac{1}{16}(2l+1)(2l-3). \quad (2.7)$$

同样地, s 玻色子代数可以生成 $SU^s(1,1)$ 代数,其生成元为

$$S^+(s) = \frac{1}{2}s^{\dagger 2}, S^-(s) = \frac{1}{2}s^2, S^0(s) = \frac{1}{4}(s^{\dagger} s + s s^{\dagger}). \quad (2.8)$$

对于 $O(2l+2)$ 情形, $U(2l+2) \supset O(2l+2) \supset O(2l+1) \supset O(3)$ 的基矢同时也是 $SU^l(1, 1)$ 和 $SU^l(1, 1)$ 的基矢, 这里 $SU^l(1, 1)$ 是由 s 和 l 玻色子对代数生成的, 其生成元为

$$S^+(sl) = \frac{1}{2}(l^+ \cdot l^+ \pm s'^2), \quad S^-(sl) = \frac{1}{2}(\bar{l} \cdot \bar{l} \pm s^2),$$

$$S^0(sl) = \frac{1}{4} \sum_m (l_m^+ l_m + l_m l_m^+) + \frac{1}{4}(s^+ s + s s^+). \quad (2.9)$$

应该指出, 在(2.9)式中取 + 号和取 - 号两种情形是相互同构的. 这样, $O(2l+2)$ 和 $SU^l(1, 1)$ 的基矢之间的互补关系可以表为

$$|N\sigma\nu n_\Delta LM\rangle = \left| N, \kappa^l = \frac{1}{2}(\sigma + l + 1), \mu^l = \frac{1}{2}(N + l + 1), \right.$$

$$\left. \kappa^l = \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{2l+1}{2}\right), n_\Delta LM \right\rangle, \quad (2.10)$$

这里 σ 是 $O(2l+2)$ 的量子数. 显然, $O(2l+2)$ 波函数可以利用 $SU^l(1, 1)$ 和 $SU^l(1, 1)$ 的耦合基矢表为

$$|N\sigma\nu n_\Delta LM\rangle = \sum_{\mu^l, \mu^s} C_{\mu^l, \mu^s}^{n_\Delta, \mu^l, \mu^s} |N; \kappa^l \mu^l; \kappa^s \mu^s; n_\Delta LM\rangle, \quad (2.11)$$

其中 $C_{\mu^l, \mu^s}^{n_\Delta, \mu^l, \mu^s}$ 是 $SU(1, 1)$ 的 Clebsch-Gordan 系数. $O(2l+2)$ 与 $SU^l(1, 1)$ 的 Casimir 算符之间有如下关系

$$\hat{C}_2(SU^l(1, 1)) = \frac{1}{4} \hat{C}_2(O(2l+2)) + \frac{1}{4}(l^2 - 1). \quad (2.12)$$

接下来, 考虑由下列生成元生成的无穷维代数

$$S_n^+ = c_s^{2n+1} S^+(s) + c_l^{2n+1} S^+(l), \quad S_n^0 = c_s^{2n} S^0(s) + c_l^{2n} S^0(l), \quad (2.13)$$

这里 c_s 和 c_l 是实参数, n 可以取 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 容易证明, 这些生成元满足如下对易关系

$$[S_m^0, S_n^+] = \pm S_{m+n}^+, \quad [S_m^+, S_n^-] = -2S_{m+n}^0. \quad (2.14)$$

因此, $\{S_m^\mu, \mu = 0, \pm; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 构成没有中心扩张项的仿射李代数 $\widehat{SU}(1, 1)$.

这个代数的最低权态 $|lw\rangle$ 满足

$$S^-(s)|lw\rangle = 0, \quad S^-(l)|lw\rangle = 0, \quad (2.15)$$

因为玻色子数 N 是确定的, 且基矢被限制于 $O(2l+1) \supset O(3)$ 这个子群链下, 故我们可以构造最低权态 $|lw\rangle$ 如下:

$$|lw\rangle = \left| N; \kappa^l = \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{2l+1}{2}\right), \mu^l = \frac{1}{2}\left(n_l + \frac{2l+1}{2}\right), \right.$$

$$\left. \kappa^s = \frac{1}{2}\left(\nu_s + \frac{1}{2}\right), \mu^s = \frac{1}{2}\left(n_s + \frac{1}{2}\right); n_\Delta LM \right\rangle. \quad (2.16)$$

这里 $n_l = \nu, n_s = \nu_s = 0$ 或 1 . 从而有

$$S_n^0 |lw\rangle = \Lambda_n^0 |lw\rangle, \quad (2.17)$$

其中

$$\Lambda_n^0 = \frac{1}{2} \left[c_s^{2n} \left(\nu_s + \frac{1}{2} \right) + c_l^{2n} \left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right) \right]. \quad (2.18)$$

利用 $\widehat{SU(1,1)}$ 生成元, 可以对 $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ 过渡区情形构造哈密顿量如下:

$$\hat{H} = gS_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \gamma \hat{C}_2(O(2l+1)) + \delta \hat{C}_2(O(3)), \quad (2.19)$$

这里 g, α, γ 和 δ 是实参数. 容易看出, 当 $c_0 = c_1$ 时, (2.19) 式等价于 $O(2l+2)$ 极限情形的哈密顿量; 而当 $c_0 = 0, c_1 \neq 0$ 时, 等价于 $U(2l+1)$ 极限情形的哈密顿量. 因此, $c_0 \neq c_1 \neq 0$ 时 (2.19) 式正是 $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ 过渡区的一般哈密顿量. 下面, 固定 c_1 而让 c_0 在 $[0, c_1]$ 区间变化.

为了使 (2.19) 对角化, 将其本征态用 $\widehat{SU(1,1)}$ 的生成元在谱参数 $x_i (i=1, 2, \dots, k) \sim 0$ 邻域进行 Fourier-Laurent 展开, 即

$$|k; \nu, \nu n_\Delta LM\rangle = \sum_{n_i \in \mathbb{Z}} a_{n_1 n_2 \dots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} S_{n_1}^+ S_{n_2}^+ \dots S_{n_k}^+ |lw\rangle, \quad (2.20)$$

其中 $a_{n_1 n_2 \dots n_k}$ 是展开系数. 在这种情况下, n_i 只能取 0 或正整数, 利用 (2.14) 给出的对易关系, 能够证明 (2.20) 中所有系数 $a_{n_1 n_2 \dots n_k}$ 都等于常数. 因此, 波函数可以简单地表为

$$|k; \nu, \nu n_\Delta LM\rangle = \mathcal{N} S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle, \quad (2.21)$$

这里 \mathcal{N} 是归一化因子,

$$S_{x_i}^+ = \frac{c_0}{1 - c_0^2 x_i} S^+(s) + \frac{c_1}{1 - c_1^2 x_i} S^+(l). \quad (2.22)$$

谱参数 x_i 由下列 Bethe 假定方程决定:

$$\frac{\alpha}{x_i} = \frac{g c_0^2 \left(\nu_s + \frac{1}{2} \right)}{1 - c_0^2 x_i} + \frac{g c_1^2 \left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right)}{1 - c_1^2 x_i} - \sum_{j \neq i} \frac{2g}{x_i - x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.23)$$

而 (2.19) 哈密顿量的本征值 $E^{(k)}$ 表为

$$E^{(k)} = h^{(k)} + \gamma \nu (\nu + 2l - 1) + \delta L(L + 1) + \alpha \Lambda_1^0, \quad (2.24)$$

其中

$$h^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha}{x_i}, \quad (2.25)$$

$$\Lambda_1^0 = \frac{1}{2} \left[c_0^2 \left(\nu_s + \frac{1}{2} \right) + c_1^2 \left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right) \right], \quad (2.26)$$

量子数 k 与玻色子总数 N 的关系为

$$N = 2k + \nu_s + \nu. \quad (2.27)$$

在玻色子数守恒的系统中, 量子数 ν_s 不是独立的, 因此在波函数的标记中可略去 ν_s . 一般地, 方程 (2.23) 有多组解, 设有 p 组解, 则应引入量子数 $\zeta = 1, 2, \dots, p$ 来区分这些能级和波函数. 因此, 相应于 (2.21) 的波函数应记为 $|k; \zeta, \nu n_\Delta LM\rangle$. 尽管以上的关系来源于谱参数 x_i 在原点邻域附近的展开, 但通过解析延拓, 它们在整个复平面上都是有效的.

利用方程 (2.23), 很容易得到 $U(2l+1)$ 和 $O(2l+2)$ 极限下的能量本征值. 首先, 将 (2.23) 中的 k 个方程相加可得到

$$h^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{gc_i^2 \left(\nu_s + \frac{1}{2} \right)}{1 - c_i^2 x_i} + \sum_{i=1}^k \frac{gc_i^2 \left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right)}{1 - c_i^2 x_i}. \quad (2.28)$$

另外,将(2.23)中固定 i 时的每一个方程乘以 x_i 后再相加就得到

$$= \sum_{i=1}^k \frac{g \left(\nu_s + \frac{1}{2} \right)}{1 - c_i^2 x_i} + \sum_{i=1}^k \frac{g \left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right)}{1 - c_i^2 x_i} - g(\nu_s + \nu + l + 1)k - gk(k-1). \quad (2.29)$$

利用(2.28)和(2.29)式,容易得到 $U(2l+1)$ 和 $O(2l+2)$ 极限下的能量本征值. 当取 $c_s = 0$ 时,容易得到

$$E^{(k)} = c_1^2 \left(\alpha k + g \left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right) k + gk(k-1) \right) + \gamma \nu (\nu + 2l - 1) + \delta L(L+1) + \frac{\alpha}{2} c_1^2 \left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right), \quad (2.30)$$

这正是 $U(2l+1)$ 极限下的能量本征值. 这时 $k = (n - \nu)/2$, 其中 n 是 $U(2l+1)$ 的量子数. 当 $c_s = c_1 = 1$ 时,容易得到

$$E^{(k)} = \alpha k + gk(\sigma + l + 1) + gk(k-1) + \gamma \nu (\nu + 2l - 1) + \delta L(L+1) + \frac{\alpha}{2} (\sigma + l + 1), \quad (2.31)$$

这正是 $O(2l+2)$ 极限下的能量本征值. 这时, $k = (N - \sigma)/2$, 其中 $\sigma = \nu + \nu_s$ 是 $O(2l+2)$ 的量子数,而 N 是玻色子总数.

3 数值解法

虽然在极限情形下的能谱容易确定,但在一般情况下,方程(2.23)是一组含有 k 个未知数的非线性方程组. 类似的 Bethe 假定方程在凝聚态物理中依赖格点的 Hubbard 模型^[12]及核结构理论中依赖轨道对力的问题^[13-16]中也出现过. 但是由于它们是非线性的,求出这类方程的所有根就非常困难. 本节将给出求解方程组(2.23)的一种数值计算方法. (2.23)式可化为

$$\frac{\beta}{y_i} \frac{c^2 \left(\nu_s + \frac{1}{2} \right)}{1 - c^2 y_i} + \frac{\left(\nu + \frac{2l+1}{2} \right)}{1 - y_i} - \sum_{j \neq i} \frac{2}{y_i - y_j}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.1)$$

其中

$$\beta = \alpha/g, \quad c = c_s/c_1 \leq 1, \quad y_i = c_i^2 x_i. \quad (3.2)$$

通过(2.21)和(2.25)式容易看到,在对(3.1)的解 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 的 k 个根进行任意置换后仍然是(3.1)式的解,即(3.1)式具有 S_k 对称性. 由于在 S_k 置换下,所有的新解对应的是系统哈密顿量的同一本征值和同一波函数,所以这些解在用于(2.19)式本征值问题时是同一个解. 故在讨论(3.1)的解时,对具有 S_k 对称性的解并不感兴趣,而只需选择这种解的其中之一作为(2.19)式本征值问题的解. 所以在以下的讨论中,我们是要寻找

除去具有 S_k 对称性的解外的其他解. 要解决的就是方程组(3.1)其他非平凡解的个数问题. 由于玻色子总数是守恒的, 对于 k 对玻色子激发的情形, 设(3.1)式的谱参数为 $\{y_1^{(\zeta)}, y_2^{(\zeta)}, \dots, y_k^{(\zeta)}\}$, $\zeta = 1, 2, \dots, p$, 即共有 p 组非平凡解, 每一组非平凡解对应于玻色子体系哈密顿量在对角化组态空间中的一个基底. 用 $s^q l^r (q+r=k)$ 来代表 q 个 s 玻色子对激发和 r 个 l 玻色子对激发的组分, 以这 $k+1$ 个组分 $\{s^k l^0, s^{k-1} l^1, \dots, s^0 l^k\}$ 为基底张成一个非对角化组态空间. 对角化组态空间的基底可以通过对非对角化组态空间基底进行一个么正变换得到, 其基底间的变换关系为

$$S^q L^r = \sum_{q', r'} a_{q', r'}^q s^{q'} l^{r'} \tag{3.3}$$

这里 $S^q L^r$ 形像地表示对角化组态空间的基底, $a_{q', r'}^q$ 为变换矩阵. 这样就定义了一个一对一的满映射, 从而不会改变空间的维数. 故对角化组态空间也是 $k+1$ 维的, 其基底形像地记作 $\{S^k L^0, S^{k-1} L^1, \dots, S^0 L^k\}$. 所以非平凡解的个数为

$$p = k + 1. \tag{3.4}$$

以下, 将从一个具体的例子出发来叙述方程(3.1)的数值解方法. 以 sd 玻色子体系为例, 该体系的玻色子总数为 N , 并有 k 对玻色子激发. 取 $\nu_s = 1, \nu_d = 2$, 参数 $\beta = 1000, c = 0.2$, 于是方程(3.1)化为

$$\frac{1000}{y_i} = \frac{0.06}{1 - 0.04y_i} + \frac{4.5}{1 - y_i} - \sum_{j \neq i} \frac{2}{y_i - y_j}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{3.5}$$

下面, 把含有 k 个未知数的方程组(3.5)简记为 $[k]$. 采用的思想方法是, 由 $[k=m]$ 的解诱导出 $[k=m+1]$ 的解. 具体的做法是, 先求出方程 $[k=1]$ 的解, 由该解可以诱导出方程组 $[k=2]$ 的解, 从而可以建立从 $[k=m]$ 的解诱导出 $[k=m+1]$ 的解的一般方法. 这样就能够求出任意 $[k]$ 的所有根. 方程(3.5)直到 $k=4$ 的解见表 1.

由表 1 不难看出这类方程的解具有如下规律: (1) $[k=1]$ 的两个根互不相等; (2) $[k=1]$ 的解是所有方程组 $[k]$ 解的基即任意 $[k]$ 的根都在 $[k=1]$ 的两个根附近; (3) 假定较大的根对应的基底为 S , 较小的根对应的基底为 D , 则对应于基底 $S^q D^r (q+r=k)$ 解的情况是, 有 q 个较大的根, r 个较小的根; (4) $[k=m+1]$ 的根与 $[k=m]$ 的根有密切的关系, 即可以由 $[k=m]$ 的根诱导出 $[k=m+1]$ 的所有根.

从表 1 入手对这种关系做具体分析. 如 $[k=2]$ 与 $[k=1]$ 的根的关系为

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(k=2) \geq y^{(1)}(k=1) \\ y_2^{(1)}(k=2) \leq y^{(1)}(k=1) \end{cases}, \begin{cases} y_1^{(2)}(k=2) \sim y^{(1)}(k=1) \\ y_2^{(2)}(k=2) \sim y^{(2)}(k=1) \end{cases}, \begin{cases} y_1^{(3)}(k=2) \geq y^{(2)}(k=1) \\ y_2^{(3)}(k=2) \leq y^{(2)}(k=1) \end{cases};$$

而 $[k=3]$ 与 $[k=2]$ 的根的关系为

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(k=3) \geq y_1^{(1)}(k=2) \\ y_2^{(1)}(k=2) < y_2^{(1)}(k=3) < y_1^{(1)}(k=2) \\ y_3^{(1)}(k=3) \leq y_2^{(1)}(k=2) \end{cases}, \begin{cases} y_1^{(2)}(k=3) \sim y_1^{(1)}(k=2) \\ y_2^{(2)}(k=3) \sim y_2^{(1)}(k=2) \\ y_3^{(2)}(k=3) \sim y_2^{(2)}(k=2) \end{cases}, \\ \begin{cases} y_1^{(3)}(k=3) \sim y_1^{(2)}(k=2) \\ y_2^{(3)}(k=3) \sim y_1^{(3)}(k=2) \\ y_3^{(3)}(k=3) \sim y_2^{(3)}(k=2) \end{cases}, \begin{cases} y_1^{(4)}(k=3) \geq y_1^{(3)}(k=2) \\ y_2^{(3)}(k=2) < y_2^{(4)}(k=3) < y_1^{(3)}(k=2) \\ y_3^{(4)}(k=3) \leq y_2^{(3)}(k=2) \end{cases}.$$

从以上的分析可以看出, $[k = m + 1]$ 的根都在 $[k = m]$ 的根附近. 且一般地, $[k = m + 1]$ 的每组根都是 $[k = m]$ 的不同组根的组合, 并可结合对角化组态空间基底的组合来进行分析.

表 1 Bethe 假定方程(3.5)的解

k	N	根 $y_i^{(\zeta)} (i = 1, 2, \dots, k; \zeta = 1, 2, \dots, k + 1)$	$S^q D^r (q + r = k)$
1	5	$y^{(1)} = 24.9627$	$S^1 D^0$
		$y^{(2)} = 0.99552$	$S^0 D^1$
2	7	$\begin{cases} y_1^{(1)} = 24.9772 \\ y_2^{(1)} = 24.8988 \end{cases}$	$S^2 D^0$
		$\begin{cases} y_1^{(2)} = 24.9628 \\ y_2^{(2)} = 0.99552 \end{cases}$	$S^1 D^1$
		$\begin{cases} y_1^{(3)} = 0.99686 \\ y_2^{(3)} = 0.99221 \end{cases}$	$S^0 D^2$
		$\begin{cases} y_1^{(4)} = 24.9835 \\ y_2^{(4)} = 24.9306 \\ y_3^{(4)} = 24.8261 \end{cases}$	$S^3 D^0$
		$\begin{cases} y_1^{(2)} = 24.9772 \\ y_2^{(2)} = 24.899 \\ y_3^{(2)} = 0.995519 \end{cases}$	$S^2 D^1$
		$\begin{cases} y_1^{(3)} = 24.9629 \\ y_2^{(3)} = 0.99686 \\ y_3^{(3)} = 0.99221 \end{cases}$	$S^1 D^2$
3	9	$\begin{cases} y_1^{(4)} = 0.997548 \\ y_2^{(4)} = 0.994224 \\ y_3^{(4)} = 0.988891 \end{cases}$	$S^0 D^3$
		$\begin{cases} y_1^{(1)} = 24.987, y_2^{(1)} = 24.9466 \\ y_3^{(1)} = 24.873, y_4^{(1)} = 24.7488 \end{cases}$	$S^4 D^0$
		$\begin{cases} y_1^{(2)} = 24.9835, y_2^{(2)} = 24.9307 \\ y_3^{(2)} = 24.8264, y_4^{(2)} = 0.995519 \end{cases}$	$S^3 D^1$
		$\begin{cases} y_1^{(3)} = 24.9773, y_2^{(3)} = 24.8992 \\ y_3^{(3)} = 0.99686, y_4^{(3)} = 0.992209 \end{cases}$	$S^2 D^2$
4	11	$\begin{cases} y_1^{(4)} = 24.963, y_2^{(4)} = 0.997548 \\ y_3^{(4)} = 0.994224, y_4^{(4)} = 0.98889 \end{cases}$	$S^1 D^3$
		$\begin{cases} y_1^{(5)} = 0.997979, y_2^{(5)} = 0.995339 \\ y_3^{(5)} = 0.99145, y_4^{(5)} = 0.985541 \end{cases}$	$S^0 D^4$

利用上面的规律, 就可以对(2.23)式进行数值计算. 以 Mathematica 为例, 首先用 Solve

求出 $[k=1]$ 的根,就可利用 $[k=1]$ 的根按以上规律的组合作为初始解逐级用 FindRoot 求出任意 $[k]$ 的所有根. 利用 P-II 以上 CPU 的计算机,其结果一般都能在数秒钟内得到. 应该指出,上述数值解法对形如(3.1)式,且参数 $\beta > 0, 0 < c < 1$ 的 Bethe 假定方程都是十分有效的. 虽然以上的规律是基于对参数 β 和 c 为给定值时的分析,但对 $\beta > 0, 0 < c < 1$ 的一般情形该规律也同样有效,且方程(3.1)的解总是实的.

作为本方法应用的另一个例子,讨论在 $U(4)$ 振子模型中对 $U(3) \leftrightarrow O(4)$ 的过渡区的计算. 这时, $l=1$, 而且方程(2.24)中的 $\gamma\nu(\nu+2l-1) + \delta L(L+1)$ 两项合并为一项. 引入新的参数 $\eta = \gamma + \delta$, 并用 ν 标记角动量量子数. 例如,考虑具有固定玻色子数 $N=6$ 的体系在参数 $c=0.2$ 处的行为. 其他参数的取值为 $\alpha=1000, g=1, c_p=1, c_s=0.2$. 针对该情况求解 Bethe 假定方程(3.1),其解由表 2 给出,其中圆括号中的数字 ζ 表示对应 Bethe 假定方程的第 ζ 组解.

表 2 Bethe 假定方程的解

ν	k	根 $y_i^{(\zeta)}$ ($i=1,2,\dots,k; \zeta=1,2,\dots,k+1$)	对应的组态 $S^q P^r$ ($q+r=k$)
0	3	(1)24.8628, 24.9556, 24.9953	$S^3 P^0$
		(2)24.9323, 24.9932, 0.998502	$S^2 P^1$
		(3)24.9876, 0.995934, 0.999083	$S^1 P^2$
		(4)0.993011, 0.997211, 0.999336	$S^0 P^3$
1	2	(1)24.8986, 24.9771	$S^2 P^0$
		(2)24.9627, 0.997506	$S^1 P^1$
		(3)0.994655, 0.998376	$S^1 P^2$
2	2	(1)24.9323, 24.9932	$S^2 P^0$
		(2)24.9876, 0.996512	$S^1 P^1$
		(3)0.993418, 0.997631	$S^1 P^2$
3	1	(1)24.9627	$S^1 P^0$
		(2)0.99552	$S^0 P^1$
4	1	(1)24.9876	$S^1 P^0$
		(2)0.99453	$S^0 P^1$

这样,由 Bethe 假定方程的解以及各参数,就可以得到体系的能谱. 对于具有固定玻色子数的体系,可以用符号 ν_ζ 来标志体系的能级,其中 ν 是体系的角动量量子数, ζ 是由于其他量子数都相同但 Bethe 假定方程的根不同而引入的附加量子数. 表 3 和表 4 给出了该体系在参数 η 分别取 0 和 100 时能谱,其中能量的单位是任意单位.

表 3 体系在相变参数 $c=0.2$ 时的能谱 ($\eta=0$)

ν_ζ	0_1	0_2	0_3	0_4	1_1	1_2	1_3
E	0	961.321	1924.72	2890.2	479.901	1442.26	2406.7
ν_ζ	2_1	2_2	2_3	3_1	3_2	4_1	4_2
E	959.821	1923.22	2888.7	1439.76	2404.2	1919.72	2885.2

表 4 体系在相变参数 $c = 0.2$ 时的能谱 ($\eta = 100$)

ν_{ζ}	0_1	0_2	0_3	0_4	1_1	1_2	1_3
E	0	961.321	1924.72	2890.2	679.901	1642.26	2606.7
ν_{ζ}	2_1	2_2	2_3	3_1	3_2	4_1	4_2
E	1559.821	2523.22	3488.7	2639.76	3604.2	3919.72	4885.2

4 结论

玻色子数和角动量都守恒并包含单体与两体相互作用的 sl 玻色子体系在 $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ 的整个过渡区是严格可解的. 本文利用了无穷维代数方法得到该过渡区的能谱和波函数的解析解. 首先我们引入无穷维仿射李代数 $\widehat{SU}(1,1)$ 并通过 Bethe 假定方法得到了关于谱参数的一组非线性方程, 体系的能级和波函数可利用这些谱参数解析表达. 为了使该方法能够在实际问题中应用, 必须求解这组 Bethe 假定方程. 针对这组方程, 提出了一种利用 Mathematica 进行数值解的方法, 从而解决了该 Bethe 假定方程的求解. 该方法可方便地应用于对双原子分子振动-转动谱和原子核中 α 集团激发谱的统一描述. 对此, 将另文发表.

参考文献 (References)

- Leggett A J. Rev. Mod. Phys., 2001, 73:307
- Bersch G F, Papenbrock T. Phys. Rev. Lett., 1999, 83:5412
- Arima A, Iachello F. Ann. Phys. (N.Y.), 1976, 99:253
- Arima A, Iachello F. Ann. Phys. (N.Y.), 1978, 111:201
- Arima A, Iachello F. Ann. Phys. (N.Y.), 1979, 123:468
- Iachello F. Chem. Phys. Lett., 1981, 78:581
- Iachello F., Levine R D. J. Chem. Phys., 1982, 77:3046
- van Roosmalen O S, Iachello F, Dieperink A E L. J. Chem. Phys., 1983, 79:2515
- PAN Feng, Draayer J P. Nucl. Phys., 1998, A636:156
- Casten R F. In: Interacting Bose-Fermi System, ed. Iachello F. Plenum, 1981
- Daley H J, Iachello F. Ann. Phys. (N.Y.), 1986, 167:37
- PAN Feng, Draayer J P. Phys. Rev., 1999, B59:4553
- PAN Feng, Draayer J P, Ormand W E. Phys. Lett., 1998, B422:1
- PAN Feng, Draayer J P. Phys. Lett., 1998, B422:7
- PAN Feng, Draayer J P. J. Phys., 1999, A32:1065
- PAN Feng, Draayer J P. Ann. Phys. (N.Y.), 1999, 275:224

Exact Solutions of sl-Boson System in $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ Transitional Region *

ZHANG Xin PAN Feng

(Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

Abstract Exact eigen-energies and the corresponding wavefunctions of the interacting sl-boson system in $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ transitional region are obtained by using an algebraic Bethe ansatz with the infinite dimensional Lie algebraic technique. Numerical algorithm for solving the Bethe ansatz equations by using mathematica package is also outlined.

Key words algebraic Bethe ansatz, $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ transitional region, exact solution

Received 24 December 2001

Supported by National Natural Science Foundation of China(10175031) and Natural Science Foundation of Liaoning Province (2001101053)