第 26 卷 第 3 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol.26, No.3
2002年3月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar.,2002

# 关于结合能公式的一种改进方法与普适的修正公式

张高龙[1)]　贾文宝　代秋声　俞伯祥　苏桐龄
（兰州大学现代物理系　兰州　730000）

**摘要**　将核子间的相互作用简化为核力键，从而根据核力键假设推导出结合能公式中[1]的体积能项与表面能项；并利用$^2_1$H 的结合能的实验值给出二者的系数值，从而使得结合能公式的参数个数减少了两个.

**关键词**　结合能公式　核力键　修正

## 1　用核力键假设推导结合能公式前两项

### 1.1　核力的饱和性可以由核力的短程性推出

在暂不考虑形变的情况下，核子可以看作一个个小球. 由立体几何可以求得一个半径为 $r$ 的球，其周围所能放的半径相同并与之相切的球的个数. 其思路如图 1 所示. 图中 A 为中心球，B，C，D 为围绕 A 的球体们的一部分，E 为 B，C 球的切点，O 为球心. 由于各球体间有间隙，使得精确计算很麻烦，而且也没有必要. 近似计算可以给出一个大致范围. 以 OE 为半径的球面面积为：$S_{OE} = 4\pi(\sqrt{3}r)^2 = 12\pi r^2$.

B 球截球面 $S_{OE}$ 的球冠面积为

$$S_{球冠} = 2\pi Rh = 2\pi(\sqrt{3}r)\left[\frac{r}{2} - (2r - \sqrt{3}r)\right] = (6 - 3\sqrt{3})\pi r^2$$

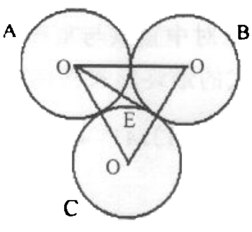


图　1

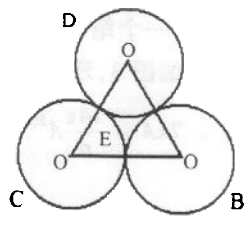


图　2

2001－04－03 收稿，2001－09－03 收修改稿

1）E-mail：zhanggaolong@263.net

245—251

由于球面上的球冠之间有形如“Δ”的截面，并且必须将其计算进去，而球面上又不易计算，故转化为平面进行近似计算，如图2所示．

比例因子

$$\gamma = \frac{S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{\sqrt{3}r^2}{\frac{1}{2}\pi r^2} \quad \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$$

对于球面，比例因子 $\gamma$ 大概应该比此处的 $\gamma$ 小，则

$$\frac{S_{OE}}{\gamma S_{球冠}} = \frac{12\pi r^2}{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}(6-3\sqrt{3})\pi r^2} = 13.5,$$

$$\frac{S_{OE}}{S_{球冠}} = \frac{12\pi r^2}{(6-3\sqrt{3})\pi r^2} = 14.9,$$

若再考虑一下物理形变，取 $n = 14$ 是合理的．因此被外层核子包裹的内层核子的核力键的平均数目为7，而外层核子的核力键的平均数目为3.5．由此可以说明：每个核子的核力键数目是受限制的，即核力具有饱和性．

### 1.2　推导结合能公式的前两项

结合能公式的前两项：体积能项与表面能项，一般是通过液滴模型类比而得到，现在可以由核力键假设来推出．由于原子核近似为球形，根据空间分布，它所拥有的核子可以分为两类：一类处于核的内部，核力键的平均数目为7；另一类处于核的表面，核力键的平均数目为3.5．设核的半径为 $r$，$a$ 为修正因子，其数值在1—2之间，核力键的总数目为 $N$，核力键的单位键能为 $\varepsilon$．表面的核子数 $n = \frac{S}{S_{结}} = \frac{4\pi A^{2/3}r^2}{a\pi r^2} = \frac{4}{a}A^{2/3}$，总的键能为 $E$

$7\left(A - \frac{4}{a}A^{2/3}\right)\varepsilon + 3.5\left(\frac{4}{a}\right)A^{2/3}\varepsilon = 7A\varepsilon - 3.5\left(\frac{4}{a}\right)A^{2/3}\varepsilon$，得结合能公式的前两项．

## 2　普适性修正公式

曾谨言曾提出一个结合能公式[1]，由于该式主要侧重于对中重核与重核的拟合，故与轻核符合的较差，如图3，现在暂时给出另外一个公式，公式的最终形式将在本文末给出．

$$B(A,Z) = 7\varepsilon A - \frac{14\varepsilon}{a}A^{2/3} - 0.5246\frac{Z(Z-1)}{Z^{1/3}} - \alpha_{sym}(t-1)tA^{-1} + B_p + B_{shell}, \quad (1)$$

$$t = |N - Z|;\ B_p = \begin{cases} (12+4)\dfrac{\sqrt{A+4}}{A} & \text{MeV} \quad 偶偶核 \\ 0 & \text{MeV} \quad 奇A核 \\ -(12-2)\dfrac{\sqrt{A-2}}{A} & \text{MeV} \quad 奇奇核 \end{cases}$$

$\varepsilon = 2.224575\text{MeV}$，$a = 1.7095$，$\alpha_{sym} = 19.0\text{MeV}$，$B_{shell}$是壳修正项，本论文暂不讨论该项．

经检验,该式对整个核区的核素均符合的还不错,比曾式有明显的进步(特别是对超铀核素的拟合). 数值如图 4. 对曾式的库仑项,当 $Z\geqslant 25$ 时,取 $Z^{5/3}$ 的形式,当 $Z<25$ 时,取 $Z(Z-1)/Z^{1/3}$. 图 6 的 $B_{\exp}$ 表示实验值,数据由文献[2,3]提供,图 3,4,5 中,$B_1$,$B_2$,$B_3$ 分别表示曾式、公式(1)和公式(2)的理论值.

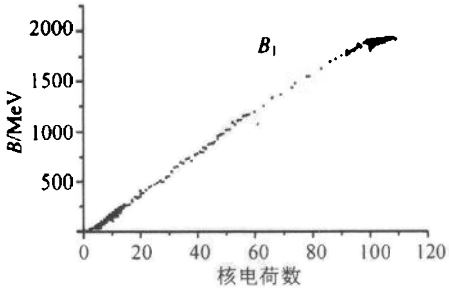


图 3　曾式理论值

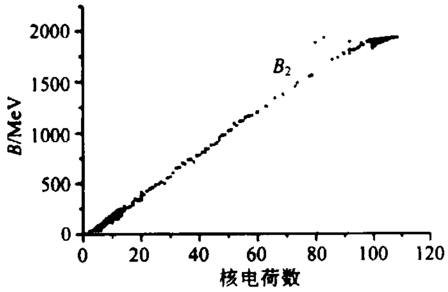


图 4　公式(1)理论值

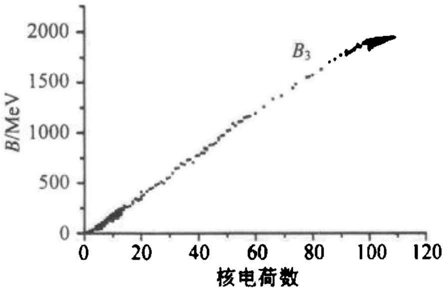


图 5　公式(2)理论值

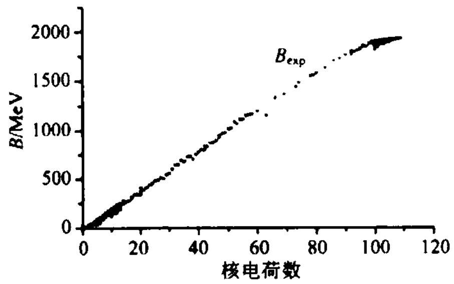


图 6　实验值

下面对各项进行说明:

## 1　库仑项仍然采用曾式

由于要对轻核进行计算,故不能再取 $Z(Z-1)\approx Z^2$ 的形式了. 分母中的 $Z^{1/3}$ 表示的物理含义是核电荷分布半径,但实验证明,原子核电荷半径 $A^{1/3}$ 律与实验有系统的偏离,而电荷分布半径 $R$ 较好地遵守 $Z^{1/3}$ 律,故以 $Z^{1/3}$ 代替 $A^{1/3}$[1]. 虽然曾式的该项系数是通过理论计算得出来的,但 $R=r_{op}Z^{1/3}$ 中的 $r_{op}$ 并不是一个精确值,可以做些调动.

## 2　对称能项变化较大

根据壳层模型和数据分析证实:各能级间隔并不相等,主壳层间的能级间隔也不均匀;对于轻核,当 $|N-Z|=1$ 时,多余的核子对于结合能并无太大的影响. 因此曾式对于轻核符合得不太好.

设 $F(t)$ 为各相应多余核子所处的能级,则 $B_{sym}=\Sigma F(t)$,虽然原则上说可以得到精确的解,但很难进行具体的计算,故尚无实用价值. 对于重核,笔者通过数值分析发现,同

一种元素内的不同种核素近似有这样一种关系：$[B_{sym}(t+2)-B_{sym}(t)]-[B_{sym}(t)-B_{sym}(t-2)]=e$，$t=|N-Z|$，$e$ 为能量差值，近似为常数．因此我们可以建立这样的模型(为了讨论方便，以偶 $Z$ 核为研究对象)：

$$F(1)\neq F(2),F(3)\approx F(4),F(5)=F(6)\cdots,$$

当 $n>1$ 时，$F(2n-1)=F(2n)$($n$ 为自然数)，且

$$F(2n)=F(2)+e(n-1)/2,\ F(2n+1)=F(3)+e(n-1)/2,$$

得

$$B_{sym}(2n+1)=F(1)+nF(2n+1)+nF(2n)=F(1)+n[F(2)+F(3)]+e(n-1)n,$$

$$B_{sym}(2n)=F(1)+(n-1)F(2n+1)+nF(2n)=[F(1)-F(3)]+n[F(2)+F(3)]+e(n-1)n/2.$$

虽然用上式可以得到较为精确的解，但因为对于不同的元素：F(1)，F(2)，F(3)及 e 的值不同，并且暂时也没有找到规律，所以具体使用不太方便，有待进一步研究．下面针对轻核的 $F(1)\approx 0$ 的情况给出一个式子：$\alpha_{sym}(t-1)t/A$，思路同上．本文中之所以采用 $|N-Z|=t$，而不采用同位旋形式：$T=|N-Z|/2$，主要是为了强调：当 $|N-Z|=1$

## 3 对能项也变化很大

由于对能项主要是对实验数据的曲线拟合，一般经验式为：$12/A^{1/2}$[3]．笔者认为：对能应该在有别的已经配对得核子存在的情况下才能产生，就像需要一个参照物一样，所以 $^2_1H$ 中无对能存在．故为了形式上的对称以及和数据拟合较好，并反映出奇奇核(最小核子数为2)与偶偶核(最小核子数为4)的核子数的特征，在与经验式不相矛盾的情况下，人为的将对能项形式改变了一下，使之与实验值更符合．

## 4 体积能项与表面能项由核力键假设推出

根据上面的讨论可知：$^2_1H$ 的结合能主要是核力键提供，不再有对能项．由此可知：核力键的单位键能应等于 $^2_1H$ 的结合能 2.224575MeV，故 $\alpha_v=7\varepsilon=15.572$MeV，公式(1)直接求出 $\alpha_s=18.218$MeV，这样便不再需要通过拟合给出两个参数的值了，从而使得结合能公式的参数减少了两个．如果不是巧合，就说明核力键的假设是有一定的物理意义的。因此对于一些轻核($A\leqslant 6$)可以用 $A(A-1)\varepsilon/2$ 表示结合能公式的前两项．这正好可以解释比结合能与核子数 $A$ 的关系曲线(图 3—6)中起始部分的近似直线现象．但 $A$ 较大时便趋于常数，其原因如下：如 $A=8$ 时，其核的几何结构为正方体，8个顶点表示8个球心，由数据分析，总键数 $N=8(8-1)/2=28$ 时与实验的结合能数据不符，大概是由于相距较远及相邻核子的影响，使得对顶角间核子无核力键存在，因此 $N=28-4=24$．对于 $A=7$ 则 $N=24-6=18$，而不是 $7(7-1)/2=21$，因为其核的结构可以在立方体中去掉一个核子表示．由此可以看出当核子数 $A>6$ 以后，必须考虑其具体的空间结构，故式子 $A(A-1)/2$ 基本上没有实用价值．

# 3 对普适性修正公式进行的检验

## 3.1 奇偶质量差

原子核的奇偶质量差定义为:设 $N,Z$ 均为偶数,令

$$P_n(N,Z) = \frac{1}{2}[B(N,Z) + B(N-2,Z) - 2B(N-1,Z)]^{[4]},$$

$$P'_n(N,Z) = \frac{1}{2}[B(N,Z-1) + B(N-2,Z-1) - 2B(N-1,Z-1)]^{[4]}$$

以及

$$P_p(N,Z) = \frac{1}{2}[B(N,Z) + B(N,Z-2) - 2B(N,Z-1)]^{[4]}$$

$$P'_p(N,Z) = \frac{1}{2}[B(N-1,Z) + B(N-1,Z-2) - 2B(N-1,Z-1)]^{[4]}$$

实验分析[1]可知 $P$ 系统的大于 $P'$,即$(P/P')_{\exp} \approx 4/3$.

下面将公式(1)代入上式进行求解

$$\left(\frac{P_n}{P'_n}\right)_{th} \approx \frac{\dfrac{\alpha_s}{3}\dfrac{1}{A^{4/3}} + \dfrac{16\times 2\sqrt{A}}{A-2} + b_{sym}}{\dfrac{2\alpha_s}{9}\dfrac{1}{A^{4/3}} + \dfrac{10\times 2\sqrt{A-4}}{A-2} + b'_{sym}} \approx 1.6\sqrt{\frac{A}{A-4}} \approx 1.6,$$

由于对称能项很难计算且对比值影响不大,故没有参加具体的运算,仅用 $b_{sym}$, $b'_{sym}$表示其位置.

由上可知,理论值与实验值基本相符,没有矛盾. 当然,可以适当调节一下对能项的系数,使之与 4/3 更接近,但为了与轻核的结合能的实验值更接近,所以没有调节.

由于起作用的主要是对能项,故$(P_p/P'_p)_{th} \approx (P_n/P'_n)_{th}$.

## 3.2 β 稳定线

在不考虑对能影响的情况下,质量式为:

$$M(A,Z) = ZM_H + (A-Z)M_n - \alpha_v A + \alpha_s A^{2/3} + \alpha_c\frac{Z(Z-1)}{Z^{1/3}} + \alpha_{sym}(|A-2Z|-1)(|A-2Z|)/A.$$

由于在前面对公式(1)各项说明中,用库仑项中 $Z^{1/3}$ 代替 $A^{1/3}$,现在还原为 $A^{1/3}$,即 $aA^{1/3} = Z^{1/3}$,为了计算方便,令 $N > Z$,则 $|N-Z| = N-Z$,故由 $M$ 的一阶导数为零近似得

$$Z \approx \frac{A\left(1 + \dfrac{M_n - M_H}{4\alpha_{sym}}\right)}{2 + \dfrac{\alpha_c}{2a\alpha_{sym}}A^{2/3}},\text{由于 } A \approx 2Z \sim 2.5Z \quad \text{则}\frac{1}{a} = 2^{1/3}\text{—}2.5^{1/3}$$

将 $\alpha_c = 0.5246$, $\alpha_{sym} = 19.0\text{MeV}$, $M_n = 939.573\text{MeV}$, $M_H = 938.7906\text{MeV}$ 和 $a$ 代入上式计算,

得

$$Z = \frac{A}{1.9796 + (0.0172 \to 0.0185)A^{2/3}}$$，与经验式：$Z = \frac{A}{1.98 + 0.0155A^{2/3}}$ 符合得较好.

# 4 讨论

β稳定线的经验式中，$A^{2/3}$项的系数为一常数，而理论检验式中的系数 $a_c/aa_{sym}$ 却因 $a$ 随 $A$，$Z$ 变化而变化. 为了与经验式相吻合，故可在对称能项系数中含入 $a$，即 $a_{sym} = a_{sym}(A/Z)^{1/3}$，则结合能公式最终为

$$B(A,Z) = 15.572A - 18.218A^{2/3} - 0.526Z(Z-1)/Z^{1/3} - a_{sym}(A/Z)^{1/3}t(t-1)A^{-1} + B_p + B_{shell}, \qquad (2)$$

$t$ 和 $B_p$ 仍采用(1)式中的公式，$a_{sym} = 13.82\text{MeV}$ 是当 $a_c = 0.526\text{MeV}$ 时拟合得出的. 由图 5 可知，在重核区(特别是超铀核素)，(2)式比(1)式拟合的更好.

综上所述，新公式与实验定律是相容的. 本文根据几个假设得到了一个两参数的结合能公式，而且对重核符合得不错，具有一定的价值.

## 参考文献(References)


1 ZENG Jin-Yan, CHENG Tan-Sheng, YANG Fu-Jia. HEP & NP, 1980, 4:632(in Chinese)
(曾谨言，程檀生，杨福家. 高能物理与核物理. 1980, 4:632)

2 YANG Fu-Jia, WANG Yan-Sheng, LU Fu-Quan. Nuclear Physics. Shanghai: Publisher of Fudan University, 1993 (in Chinese)
(杨福家，王炎生，陆福全. 原子核物理. 上海：复旦大学出版社，1993 年版)

3 CHEN Chen-Jia. Handbook of Atom and Nuclear Physics. Beijing: Publisher of Beijing, 1993 (in Chinese)
(陈辰嘉. 原子与原子核物理手册. 北京：北京出版社，1993 年版)

4 XU Si-Da. Nuclear Physics. Beijing: Publisher of Tsinghua University, 1992(in Chinese)
(徐四大. 核物理学. 北京：清华大学出版社，1992 年版)

# A Method of Improving the Formula of Binding Energy and Its Universal Revised Formula

ZHANG Gao-Long[1)]　JIA Wen-Bao　DAI Qiu-Sheng　YU Bo-Xiang　SU Tong-Ling

(Department of Modern Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract**　The action among nucleons is simplified as the bond of nuclear force from which the formula of volume energy and the formula of surface energy are inferred. And the two parameters are worked out by the binding energy of $^2_1H$, and then two parameters are reduced. The formula of binding energy is given by using both the experimental data and the theory value, which is obtained from the semi-rational formula and Zeng's formula of binding energy. Then basing on this formula of binding energy, we get the D-value of odd-even mass of nuclei and $\beta$ stable line. In correspondence with the empirical formula of $\beta$ stable line, the value of parameter is modified, so the final formula of binding energy is obtained. The calculation values of new formula are good agreement with experimental data, especially for heavy nuclei, further supporting the utility of the formula to describe nuclear structure.

**Key words**　formula of binding energy, bond of nuclear force, revise

Received 3 April 2001, Revised 3 September 2001

1) E-mail: zhanggaolong@263.net