

# 波包的空时演化与能级免交叉

刘芳<sup>1</sup> 李君清<sup>2</sup>

1(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

2(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

**摘要** 采用二维谐振子相干态为初始态,在形变原子核系统分别为规则和混沌两种情况下,对其在相空间中的时间行为进行了傅里叶分析,特别比较了混沌系统中波包宽度在整个时间段与达到饱和后两个阶段的傅里叶分析结果.指出系统的混沌运动是由于大量能级免交叉的出现在波包运动的初始阶段就破坏了波包内部的规则结构,波包各成分间的协同性被破坏,波包的运动成为混沌.此后,波包内各成分对波包运动的贡献开始相同,能级之间的免交叉对波包运动的影响也不再明显.

**关键词** 量子混沌 能级免交叉 相干态波包

## 1 引言

近年来,人们通过对量子系统的研究,逐步对经典混沌在量子系统中的表现有了一定的认识并且试图对量子规则系统如何成为量子混沌系统这个过程给出一个确切地描述<sup>[1,2]</sup>.目前一些观点认为<sup>[3,4]</sup>,量子系统中大量本征能级之间出现相互重叠的能级免交叉现象是量子混沌的一个重要标志,也是导致系统成为混沌的一个主要方式.能级间出现免交叉现象使得对应的能态之间发生了强混杂、强关联,破坏了系统的动力学对称性,从而导致了量子系统中混沌运动的出现.本文从动力学的角度出发,在能量表象中分析了量子相干态波包在相空间中的时间行为,进一步指出系统中波包混沌运动的出现是由于在波包运动的初始阶段系统态空间原有的拓扑结构已被剧烈地破坏,波包内各成分失去了原有的协调性,从而导致了系统中完全不同于量子规则运动的量子混沌运动的出现.

我们在以前的文章中<sup>[5]</sup>通过改变同一哈密顿量的形变参数,已经指出了相干态波包分别起始于规则系统和混沌系统中时,其在相空间中随时间的演化是截然不同的.规则系统中相干态波包宽度随时间的演化是随时间极缓慢地、振荡型地上升,而在混沌系统中相干态波包随时间的演化则是在演化的初始阶段波包指数型地增长并达到一饱和值,然后保持在该饱和值附近并作无规则小振荡.本文的工作是在上述工作的基础上进行的.

2001-09-10 收稿

\* 国家自然科学基金(19847002, 10175082)和中国科学院百人计划基金资助

## 2 相干态波包在 Hamiltonian 系统中的动力学行为

我们研究的系统中的哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \left( x^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda \frac{2z^3 - 3zx^2}{\sqrt{z^2 + x^2}} \right) = H_0 + \frac{\lambda}{2} \frac{2z^3 - 3zx^2}{\sqrt{z^2 + x^2}}. \quad (1)$$

该哈密顿量可认为是一个二维谐振子系统附加一个形变项得到的, 经典粒子在该系统中的运动行为已经得到了充分的研究<sup>[6,7]</sup>, 对应的量子系统中的运动也已进行了一定的研究<sup>[5,8,9]</sup>. 其中  $p$  是系统的总动量,  $p^2 = p_x^2 + p_z^2$ ,  $b = 0.5$ .  $\lambda$  是形变强度, 当  $\lambda$  等于  $0.1\lambda_c$  时, 经典系统完全规则; 当  $\lambda$  等于  $0.95\lambda_c$  时, 经典系统完全混沌.  $\lambda_c$  是指系统势场开放至无穷远时形变强度  $\lambda$  的取值,  $\lambda_c \approx 1.64$ .

为了实现规则系统的量子经典对应, 选取量子系统的初始态为相干态波包  $|\alpha_0\rangle$ , 其表达式为

$$|\alpha_0\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_x|^2 + |\alpha_z|^2)\right] \cdot \sum_{n_{1x}=0}^{\infty} \sum_{n_{2z}=0}^{\infty} \frac{(\alpha_x)^{n_{1x}} (\alpha_z)^{n_{2z}}}{\sqrt{n_{1x}!} \cdot \sqrt{n_{2z}!}} |n_{1x}, n_{2z}\rangle, \quad (2)$$

其中  $\alpha_x, \alpha_z$  的取值是由初始时刻波包在相空间中的位置  $\{ \langle x_0 \rangle, \langle p_{x_0} \rangle; \langle z_0 \rangle, \langle p_{z_0} \rangle \}$  决定,

它们之间具体的关系式为:  $\langle x_0 \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha_x)$ ,  $\langle p_{x_0} \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\alpha_x)$ ;  $\langle z_0 \rangle = \sqrt{2b} \operatorname{Re}(\alpha_z)$ ,  $\langle p_{z_0} \rangle$

$= \sqrt{\frac{2}{b}} \operatorname{Im}(\alpha_z)$ . 可以证明初始时刻基本动力学变量的测不准度满足最小测不准关系

$$(\Delta x_0)^2 (\Delta p_{x_0})^2 = \frac{1}{4}, (\Delta z_0)^2 (\Delta p_{z_0})^2 = \frac{1}{4}. |n_{1x}, n_{2z}\rangle$$

是未形变的二维谐振子系统  $H_0$  的本征态, 表达式为

$$|n_{1x}, n_{2z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{1x}!} \cdot \sqrt{n_{2z}!}} (\alpha_x^\dagger)^{n_{1x}} (\alpha_z^\dagger)^{n_{2z}} |0\rangle, \quad (3)$$

式中  $\alpha_x^\dagger$  和  $\alpha_z^\dagger$  是  $x$  和  $z$  方向上的产生算符,  $n_{1x}, n_{2z}$  分别为  $x$  和  $z$  方向上的量子数,  $|0\rangle$  是真空态.  $t$  时刻系统状态的表达式为

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_m |\Psi_m(x, z)\rangle \exp(-iE_m t) \langle \Psi_m(x, z) | \alpha_0 \rangle, \quad (4)$$

其中  $|\Psi_m(x, z)\rangle$  和  $E_m$  为形变哈密顿系统  $H$  的本征态和对应的能量. 则任意时刻波包在相空间的宽度随时间的演化可以由表达式  $\langle \alpha(t) | x^2 | \alpha(t) \rangle - \langle \alpha(t) | x | \alpha(t) \rangle^2$  和  $\langle \alpha(t) |$

$|z^2 | \alpha(t) \rangle - \langle \alpha(t) | z | \alpha(t) \rangle^2$  求得, 具体形式可参考文献[5]和[8]. 考虑波包起始于相空间中一点  $\{x, p_x; z, p_z\} = \{0.0, 3.78; 0.0, 0.0\}$ , 其随时间分别在规则系统和混沌系统中的演化如图 1 和图 2, 这里仅仅给出演化时间范围为  $t = 0-100$ .

图 1 是  $\lambda$  等于  $0.1\lambda_c$  时波包宽度随时间的演化, 此时经典系统完全规则. 在对应的量子系统中, 可以看到, 波包宽度随时间的演化呈现出完全规则的上升、下降, 说明波包在相空间中经过一段时间的扩散以后又几乎回到初始时刻的状态, 波包的运动是规则的. 当形变强度  $\lambda$  等于  $0.95\lambda_c$  时, 经典系统完全混沌, 在对应的量子系统中, 波包在相空间中

的运动与系统完全规则时相比较也是完全不同的,这可以从图 2 中看到.此时波包宽度随时间指数型地、迅速地增大到一饱和值后,在该饱和值附近做无规则振荡,说明波包在相空间指数型扩散后,波包内部的拓扑结构被严重破坏,波包再也不可能回到其初始时刻的状态.显示了和量子规则运动截然不同的运动形式.

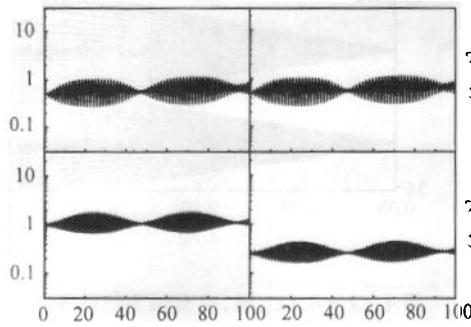


图 1 初始态为  $|\alpha_0\rangle, \lambda = 0.1\lambda_c$  时, 波包宽度随时间的动力学演化

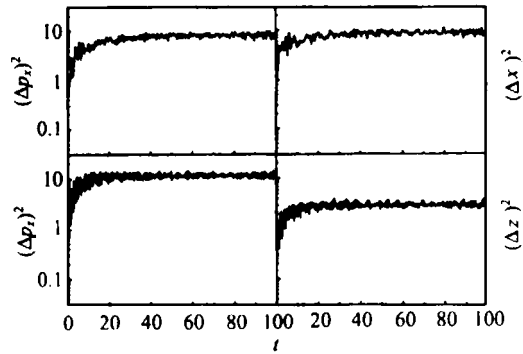


图 2 初始态为  $|\alpha_0\rangle, \lambda = 0.95\lambda_c$  时, 波包宽度随时间的动力学演化

选取相空间完全相同的相干态为初始态,通过改变系统的形变强度,在系统分别为规则和混沌时,可以看到它们显示了两种截然不同的时间演化行为.在经典系统中,粒子显示出不同于规则运动的混沌运动的行为主要是由于描述粒子状态的相空间的规则结构被破坏,因此在对应的量子系统中,为了分析产生这两种现象的不同原因,在描述系统状态的量子态空间中对其进行了分析,这可以通过对其时间行为进行傅里叶变化来实现.

### 3 波包运动行为的傅里叶分析

为了便于对上述的数值结果进行分析,首先对动力学变量测不准度随时间的演化给出一个统一的表达式(动力学变量统一用  $Q$  来表示)

$$\langle Q_i \rangle_{\lambda,t}^2 = \sum_{n_1, n_2, n'_1, n'_2} \langle \alpha_0 | n'_1, n'_2 \rangle \langle n'_1, n'_2 | \psi_n(\lambda, x, z) \rangle \langle \psi_n(\lambda, x, z) | Q_i^2 | \psi_m(\lambda, x, z) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} [E_m(\lambda) - E_n(\lambda)]t} \langle \psi_m(\lambda, x, z) | n_1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 | \alpha_0 \rangle - \langle Q_i \rangle_{\lambda,t}^2, \quad (5a)$$

$$\langle Q_i \rangle_{\lambda,t} = \sum_{n_1, n_2, n'_1, n'_2} \langle \alpha_0 | n'_1, n'_2 \rangle \langle n'_1, n'_2 | \psi_n(\lambda, x, z) \rangle \langle \psi_n(\lambda, x, z) | Q_i | \psi_m(\lambda, x, z) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} [E_m(\lambda) - E_n(\lambda)]t} \langle \psi_m(\lambda, x, z) | n_1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 | \alpha_0 \rangle, \quad (5b)$$

从上两式可以看出,动力学变量的测不准度的时间相关项仅仅出现在指数部分,它们的时间行为是由各波函数及对应的能级间隔共同决定.为了在能量表象中分析图 1 和图 2 中波包在相空间中显示的两种不同的时间演化行为,我们对动力学变量的测不准度随时间的演化进行了傅里叶分析.

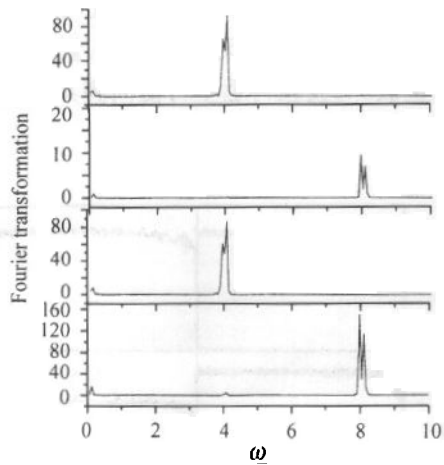


图 3 初始态为  $|\alpha_0\rangle$ ,  $\lambda = 0.1\lambda_c$  时, 波包宽度随时间演化的傅里叶分析  $t = 0-100$ .

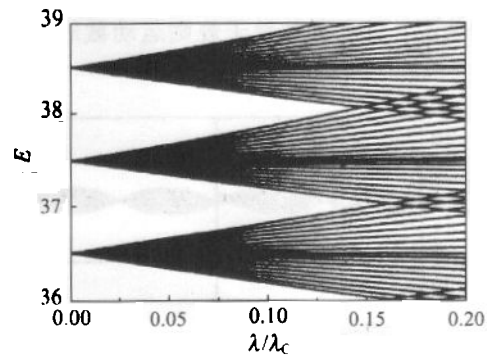


图 4  $\lambda = 0.1\lambda_c$  时, 哈密顿系统的能谱图

图 3 给出了规则情况下波包宽度随时间演化的动力学行为的傅里叶变换分析, 图 4 给出了此时系统的能谱图. 从图 3 中可以看到, 在该条件下只有唯一的一个能级间隔起到了主要作用, 其它能级间隔对波包的演化几乎不起作用, 说明该条件下, 波包的运动是规则的, 波包原有的内部结构几乎没有被破坏, 波包内各成分间未发生强混杂, 能级间不存在免交叉现象. 这也可以从图 4 中看到, 此时系统能谱分布完全规则, 能级间没有免交叉现象的出现. 而完全混沌的系统则显示了与规则系统截然不同的分析结果, 图 5 给出

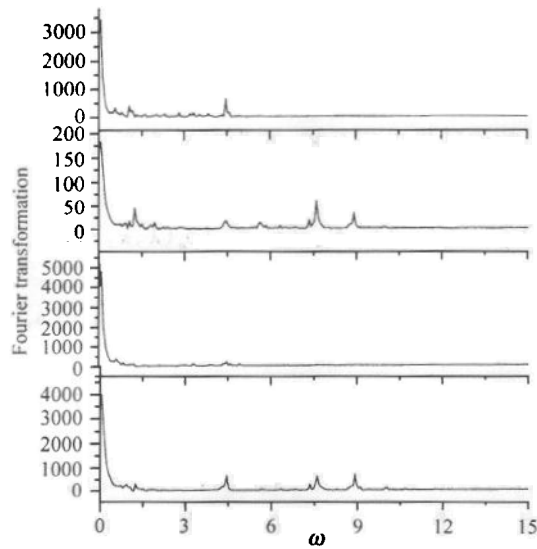


图 5 初始态为  $|\alpha_0\rangle$ ,  $\lambda = 0.95\lambda_c$  时, 波包宽度随时间演化的傅里叶分析  $t = 0-100$ .

了混沌情况下波包宽度随时间演化的动力学行为的傅里叶变换分析,图6给出此时系统的能谱图.可以看到此时小能级间隔起到了决定性的作用,大能级间隔在波包运动过程中则影响较小几乎至没有,而此时的能谱分布中存在着大量的能级免交叉现象(图6).我们推测该小能级间隔对波包的作用主要反映了波包运动的初期,能级的免交叉行为对波包内部原有的拓扑结构的迅速破坏,相干态各频率成分间随时间的运动不再协调,波包随时间的演化显示了与量子规则运动截然不同的运动状态,随着波包随时间的演化,各频率成分对波包的演化贡献趋于平衡,波包的运动在宏观上达到无规状态.当波包在相空间中的运动达到无规状态时,其傅里叶分析谱分布中应不再显示能级免交叉对波包运动的贡献,即小频谱对波包运动的大贡献部分应该消失.图7给出了波包在时间段  $t = 20-100$  运动的傅里叶频谱分布,此时小频谱大贡献的部分消失,波包内各成分对波包运动的贡献几乎相同,与上述分析结果完全一致.

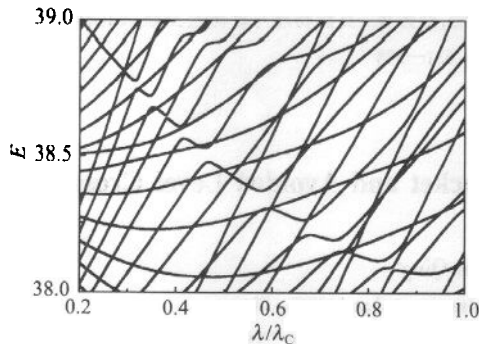


图6  $\lambda = 0.95\lambda_c$  时,哈密顿系统的能谱图

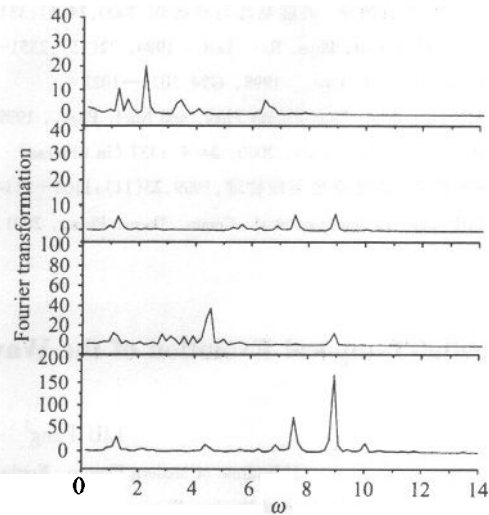


图7 初始态为  $|\alpha_0\rangle$ ,  $\lambda = 0.95\lambda_c$  时,  
波包宽度随时间演化的傅里叶分析  
 $t = 20-80$ .

通过对波包在相空间中的规则运动行为和混沌运动行为以及混沌时间行为时,波包宽度达到饱和后和整个时间段这两个时间段的时间行为进行傅里叶变化,可以明显看到量子系统中波包的混沌运动主要是由于描述系统状态的态空间中能级间的免交叉现象所导致.这与经典系统中混沌行为是由于规则系统相空间中的拓扑结构被破坏相对应.

本文仅仅给出了系统在完全规则和完全混沌时的有关结果,结论对于系统中规则运动和混沌运动共存时的情形也同样可得<sup>[9]</sup>.

## 4 结论

通过对相干态波包在规则系统和混沌系统中两种截然不同的时间演化的动力学行为进行傅里叶分析,认为系统中大量能级免交叉现象的存在确实是导致系统出现混沌运动

的一个重要因素. 在波包运动的初始阶段,大量的能级免交叉已剧烈地破坏了波包内部原有的拓扑结构,导致波包中各成分间发生强混杂、强关联,波包的运动达到各态历经,各成分对波包的运动贡献大小相同,波包的运动成为混沌. 此后波包在相空间中的宽度不再随时间增长而达到饱和,并在该饱和值附近作无规则小振动,能级免交叉对波包的贡献不再显著.

### 参考文献 (References)

- 1 Gutzwiller M C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer New York, 1990
- 2 XU Gong-Ou, YANG Ya-Tian. *Chin. Phys. Lett.*, 1999, **16**:6—8; XU Gong-Ou et al. *Chin. Phys. Lett.*, 1999, **16**:82
- 3 WANG Shun-Jin, CHU S Y. *Phys. Rev.*, 1993, **A47**(8): 3546—3553
- 4 XU Gong-Ou et al. *Phys. Rev.*, 1992, **A45**: 5401
- 5 LIU Fang, LI Jun-Qing et al. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 2000, **24**(4):331—336 (in Chinese)  
(刘芳,李君清等. 高能物理与核物理, 2000, **24**(4):331—336)
- 6 Heiss W D et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(15):2351—2354
- 7 LI Jun-Qing. *J. Phys.*, 1998, **G24**:1021—1028
- 8 LIU Fang et al. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 1999, **23**(11):1108—1114; LI Jun-Qing, LIU Fang et al. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.* 2000, **24**(4):337 (in Chinese)  
(刘芳等. 高能物理与核物理, 1999, **23**(11):1108—1114; 李君清, 刘芳等. 高能物理与核物理, 2000, **24**(4):337)
- 9 LIU Fang, LI Jun-Qing et al. *Comm. Thero. Phys.*, 2001, **35**(5):531—538

## Spatial-Temporal Evolution of the Wave Packet and Avoided Level Crossing

LIU Fang<sup>1</sup> LI Jun-Qing<sup>2</sup>

1(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

2(Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

**Abstract** In the two cases that the deformed nuclear system is regular and chaotic, the spatial-temporal evolution of the coherent states of a two dimensional harmonic oscillator system as an initial state was analyzed with the Fourier transformation, especially by comparing the Fourier transformation of the width of the wave packet in the whole time stage with that the wave packet approaching to the saturation in the chaotic system. It was found that since a large number of avoided level crossings destroy the regular structure of the state space of the system, the components in the wave packet are no longer coherent and the motion of the wave packet becomes chaotic. Afterwards, the contribution coming from the different components tends to uniform, the influence of the avoided level crossings on the motion of the wave packet is not obvious also.

**Key words** quantum chaos, avoided level crossing, coherent states

Received 10 September 2001

\* Supported by NSFC (19847002, 10175082) and 100 Persons Project of CAS