

# 暗能量和重子数等曲率扰动\*

王秀莲<sup>1)</sup> 张新民

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

**摘要** 文章对作为暗能量候选者之一的 Quintessence 场与物质的相互作用及其在宇宙学中的应用进行了研究,通过引入 Quintessence 与重子流的耦合合理地解释了重子与反重子的不对称性.另外还详细地计算了重子数等曲率扰动.

**关键词** 暗能量 重子数不对称 等曲率扰动

## 1 引言

近年来,尤其是自 1998 年以来,天文观测(超新星, Boomerang, Maxima 特别是今年的 WMAP<sup>[1]</sup>等)表明,宇宙是平坦的并在加速膨胀,强有力地支持了暴涨 $\oplus$ 暗物质 $\oplus$ 暗能量的宇宙模型. 2003 年 2 月 WMAP 研究组分析 Wilkinson 微波背景各向异性探测器(WMAP)一年的观测数据,并结合其它宇宙微波背景辐射和大尺度结构的整体分析给出,普通物质和冷暗物质分别约占 4% 和 23%,而暗能量却占 73%. 研究暗能量是 21 世纪近代粒子物理和宇宙学的一大挑战.

在 Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 宇宙模型框架下,暗能量具有负压,推动宇宙的加速膨胀,WMAP 分析给出其状态方程  $w = P/\rho < -0.78$ . 在粒子物理中,真空能为  $w = -1$ ,满足加速膨胀的需要,但目前的量子场论的理论预言值远大于观测值,这就是著名的宇宙学常数问题<sup>[2]</sup>;暗能量的另一候选者为标量场,如 Quintessence<sup>[3]</sup>. 对于均匀各向同性的 Quintessence 场,状态方程可以表示为

$$w_Q = \frac{\frac{1}{2}\dot{Q}^2 - V(Q)}{\frac{1}{2}\dot{Q}^2 + V(Q)}, \quad (1)$$

合适的势可以给出今天的状态方程  $w_{Q0} < -0.78$ , 以此推动宇宙的加速膨胀. 研究 Quintessence 的物理

性质是当前宇宙学的一个热点. 不同于真空能,因为 Quintessence 是一种动力学场,人们期待它与物质间有直接的相互作用. 例如文献[4]讨论了 Quintessence 和引力的非最小耦合. 但它与一般物质的相互作用,实验上给出了很强地限制<sup>[5-7]</sup>,其主要原因是这些相互作用对 Quintessence 势有过大的量子修正. 然而,也会有例外的情形出现,例如,文献[7]中就曾考虑过形式为  $QF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$  类型的相互作用,  $F_{\mu\nu}$  是电磁场强度张量. 2001 年本文作者与李明哲、冯波合作提出了一类 Quintessence 场与物质的新的相互作用<sup>[8]</sup>,其有效拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{c}{M} \partial_\mu Q J_B^\mu. \quad (2)$$

这里,  $M$  是新物理截断标度,例如:普朗克标度  $M_P$  或大统一标度  $M_{\text{GUT}}$ ,  $J_B^\mu$  为重子流,  $c$  是耦合常数,代表 Quintessence 和一般物质相互作用的作用强度. 值得提出,方程(2)包括 Quintessence 场  $Q$  的微分,由此遵从  $Q \rightarrow (Q + \text{常数})$  变换的对称性,所以, Quintessence 的势不会因为相互作用  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  的量子修正而有所改变. 在文献[8]中,讨论了  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  对宇宙早期重子产生机制(Baryogenesis)的应用. 之后, Mark Trodden 等<sup>[9,10]</sup>在不同的 Quintessence 模型和“温暴涨模型”中讨论了有效拉氏量(2)式对重子产生理论的应用. 本文将针对一类具有“追踪(tracking)”性质的 Quintessence 模型(其势函数由方程(9)给出),研究

2003-04-11 收稿

\* 国家自然科学基金(10047004)资助

1) wangxl@mail.ihep.ac.cn

重子与反重子不对称性产生的可能性,并讨论重子数等曲率扰动. 结果给出,我们的模型可以产生所需要的重子与反重子不对称. 但不同于文献[8,9]的结果,我们的模型还可以给出一定的重子数等曲率扰动,将为精确的微波背景辐射观测所检验.

## 2 相互作用 Quintessence 和重子数不对称产生机制

在 FRW 宇宙演化过程中,  $\dot{Q}$  不为零,由此方程(2)产生了重子的有效化学势  $\mu_b$ ,

$$\frac{c}{M} \partial_\mu Q J_B^\mu \rightarrow c \frac{\dot{Q}}{M} n_B = c \frac{\dot{Q}}{M} (n_b - n_{\bar{b}}),$$

$$\mu_b = c \frac{\dot{Q}}{M} = -\mu_{\bar{b}}. \quad (3)$$

在热平衡下,重子数不对称可以写成(当  $T \gg m_b$  时)<sup>[11]</sup>:

$$n_B = \frac{g_b T^3}{6} \left[ \frac{\mu_b}{T} + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_b}{T}\right)^3 \right] \simeq c \frac{g_b \dot{Q} T^2}{6M}, \quad (4)$$

其中  $g_b$  表征重子的内禀自由度,  $m_b$  是重子的质量. 根据宇宙熵密度的表达式:

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_\star T^3 \quad (5)$$

可以得到净重子数与熵密度之比的最表达式:

$$n_B/s \simeq \frac{15c}{4\pi^2} \frac{g_b \dot{Q}}{g_\star M T}, \quad (6)$$

其中  $g_\star$  是宇宙中所有相对论性粒子的总自由度. 方程(6)中的  $\dot{Q}$  可以通过求解 Quintessence 场的运动方程

$$\ddot{Q} + 3H\dot{Q} + V'(Q) = -\frac{c}{M} (\dot{n}_B + 3Hn_B) \quad (7)$$

来得到,这里  $H$  是哈勃常数,  $V(Q)$  是 Quintessence 势. 在辐射为主时期,哈勃常数可以表示为

$$H = \frac{1}{2t} = 1.66 g_\star^{1/2} \frac{T^2}{M_{pl}}. \quad (8)$$

我们注意到方程(7)的右边可以写成  $-(cg_b/6)(T^2/M^2)(\dot{Q} + H\dot{Q})$ ,在甚早期宇宙中温度  $T$  高得可以和截断标度相比拟时,方程(7)右边的项不可以忽略,除此之外,方程(7)右边的项均可忽略.

为了求解方程(7),考虑一个 Quintessence 模型<sup>[12]</sup>,其势函数为

$$V = \Lambda^4 e^{fQ}, \quad (9)$$

其中  $\Lambda$  和  $f$  为具有质量量纲的参数,计算时取  $G = M_{pl}^{-2} = 1$  来归一. 基于观测事实  $\Omega_Q \simeq 0.7$  和  $w_Q < -0.78$ ,  $\Lambda$  和  $f$  的取值区间可以被限定. 通过数值求

解 Quintessence 场的演化方程,并取今天的  $\Omega_Q = 0.7$ ,在图 1 中给出  $w_Q$  随参数  $f$  的变化行为. 由图可知,  $w_Q < -0.78$  对应于  $f \sim 1 M_{pl}$ . 由此,在下面的讨论中,将取  $f = 1 M_{pl}$ .

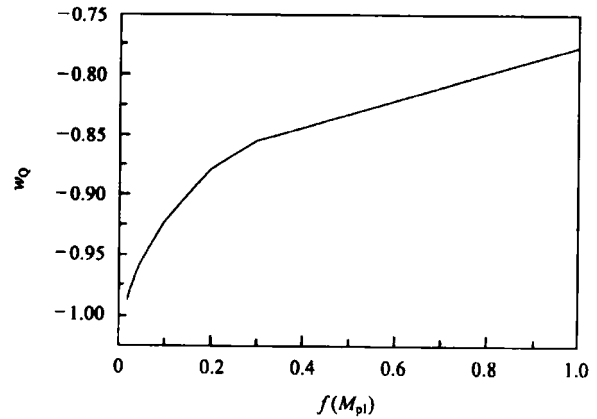


图 1 Quintessence 今天的状态方程  $w_Q$

为了计算重子的不对称,根据方程(6),需要知道  $\dot{Q}$  的表达式. Quintessence 势(9)具有追踪行为的性质<sup>[12]</sup>. 根据 tracker 方程<sup>[12]</sup>

$$\Gamma \equiv V''V/(V')^2 = 1 + \frac{w_B - w_Q}{2(1 + w_Q)} - \frac{1 + w_B - 2w_Q}{2(1 + w_Q)} \cdot \frac{\dot{x}}{6 + \dot{x}} - \frac{2}{1 + w_Q} \frac{\ddot{x}}{(6 + \dot{x})^2}, \quad (10)$$

其中  $x = \dot{Q}^2/2V$ ,  $\dot{x} \equiv d \ln x / d \ln a$ ,  $\ddot{x} \equiv d^2 \ln x / d \ln a^2$ ,  $w_B$  是宇宙背景的状态方程:辐射为主时,  $w_B = 1/3$ ;物质为主时,  $w_B = 0$ . 在追踪区域,方程(9)的 Quintessence 模型的状态方程  $w_Q$  可以表示为

$$w_Q = \frac{w_B - 4Q + 2 - 2f}{4Q - 1 + 2f} = \begin{cases} \frac{-4Q + 2 - 2f}{4Q - 1 + 2f}, & (\text{MD}), \\ \frac{7/3 - 4Q - 2f}{4Q - 1 + 2f}, & (\text{RD}), \end{cases} \quad (11)$$

MD 和 RD 分别表示物质为主时期和辐射为主时期. 因为  $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ ,  $T \propto a^{-1}$  ( $T$  是光子的温度), 根据能量密度  $\rho$  随光子温度  $T$  的变化规律,可以得到 Quintessence 的能量密度

$$\rho_Q = \rho_{Q0} \left( \frac{T}{T_{eq}} \right)^{4Q-1+2f} \left( \frac{T_{eq}}{T_0} \right)^{4Q-1+2f}, \quad (12)$$

$\rho_{Q0}$  是今天的 Quintessence 的能量密度, 大约是  $10^{-47} \text{ GeV}^4$ .  $T_0 = 2.73 \text{ K} \simeq 2.35 \times 10^{-13} \text{ GeV}$  是今天光子的温度,  $T_{eq} \simeq 2.38 \times 10^{-9} \text{ GeV}$  是在物质-辐射相

等时的温度. 因为

$$\dot{Q}^2 = (1 + \omega_Q)\rho_Q,$$

所以有

$$\dot{Q} = \sqrt{\frac{4/3}{4Q-1+2f}} \sqrt{\rho_{\text{eq}} \left(\frac{T}{T_{\text{eq}}}\right)^{\frac{2}{4Q-1+2f}}} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_0}\right)^{\frac{3}{2(4Q-1+2f)}}$$

取  $f = 1M_{\text{pl}}$ , 就有

$$\dot{Q} \simeq 0.65 T^2 \quad (14)$$

因此重子数和熵的比值可以写成 (取  $g_{\star} \sim \mathcal{O}(100)$ ,  $g_b \sim \mathcal{O}(1)$ ):

$$\frac{n_B}{s} = \frac{15c}{4\pi^2} \frac{g_b \dot{Q}}{g_{\star} M T} = 10^{-3} c \frac{T}{M}. \quad (15)$$

对于本文讨论的重子数产生机制, 由于 CPT 破坏, 重子数不对称是在热平衡中产生的. 这要求重子数破坏的相互作用发生得非常快 ( $\Gamma_b > H$ ). 但是, 如果重子数破坏的相互作用在热平衡中一直持续到  $\dot{Q} \rightarrow 0$ , 那么最后的重子数不对称很显然就会趋向于 0, 所以用  $T_D$  代表重子数破坏相互作用冻结的温度, 即,  $\Gamma_b(T_D) \simeq H(T_D)$ , 我们就得到最后的重子数不对称,

$$\left. \frac{n_B}{s} \right|_{T_D} = 10^{-3} c \frac{T_D}{M}.$$

对于截断标度为  $M = M_{\text{pl}}$  或  $M = M_{\text{GUT}}$ , 选取  $c \simeq 4\pi$ , 由上面方程可知, 当  $T_D$  分别在  $10^{11}$  GeV 和  $10^8$  GeV 时 (16) 式给出大爆炸核合成和宇宙微波背景各向异性探测所要求的重子数不对称  $n_B/s \sim 10^{-10}$ .

### 3 重子数的等曲率扰动

以上的计算只考虑了 Quintessence 在空间中分布是各向均匀同性的. 但实际上, 既然 Quintessence 是一种标量场, 那么在时空中它就应该存在着扰动, 下面就具体研究重子数的等曲率扰动.

通过前面的计算已经知道重子数不对称是正比于  $\dot{Q}$  的, 在追踪区域,  $\dot{Q} \propto \sqrt{V(Q)}$ , 因此有

$$\frac{n_B}{s} \propto \sqrt{V(Q)}, \quad (17)$$

所以

$$\delta\left(\frac{n_B}{s}\right) \propto \frac{V'}{2\sqrt{V}} \delta Q,$$

$$\frac{\delta(n_B/s)}{n_B/s} = \frac{V'}{2V} \delta Q.$$

为了得到  $\delta Q$ , 需要求解下面的运动方程

$$\delta\ddot{Q}_k + 3H\delta\dot{Q}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta Q_k + V''\delta Q_k = 0, \quad (19)$$

其中  $\delta Q_k$  是  $\delta Q$  的傅里叶变换系数,  $V''$  的具体表达式为<sup>[13-15]</sup>

$$V'' = \frac{3}{2} H c_Q^2 + \frac{9}{4} (1 - c_Q^2) (w_B + c_Q^2 + 2) H^2, \quad (20)$$

这里  $c_Q^2$  是 Quintessence 的声速,

$$c_Q^2 \equiv \frac{\dot{p}_Q}{\dot{\rho}_Q} = w_Q - \frac{\dot{w}_Q}{3H(1+w_Q)}. \quad (21)$$

考虑到声速可以近似看成常数<sup>[14]</sup>, 方程 (20) 右边的第一项可以省略掉, 因此方程 (19) 的解的表达式为<sup>[14]</sup>

$$\delta Q_k \simeq \tau^{-1/2} [C_1 J_{\nu}(k\tau) + C_2 Y_{\nu}(k\tau)], \quad (22)$$

$\tau$  是共形时间 ( $d\tau \equiv dt/a$ ), 并且在辐射为主时期,  $a \propto \tau \propto T^{-1}$ , 所以在方程 (22) 中,  $J_{\nu}(k\tau)$  是第一类贝塞尔函数,  $C_1, C_2$  分别是与时间无关的常数, 同时,  $\nu^2$  和  $\beta$  的表达式为

$$\nu^2 \equiv \frac{1}{4} - \beta,$$

$$\beta \equiv \frac{9}{4} (1 - c_Q^2) (w_B + c_Q^2 + 2). \quad (23)$$

在宇宙学中有意义的扰动模式是那些在宇宙的很早期的阶段就已经远远超出哈勃半径的模式, 即  $k\tau \ll 1$ . 在  $k\tau \rightarrow 0$  的极限下, 贝塞尔函数的渐近表达式为

$$J_{\nu}(k\tau) \simeq \frac{(k\tau)^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(1+\nu)}, \quad (k\tau \rightarrow 0). \quad (24)$$

假设 Quintessence 场原初扰动来源于暴涨期间, 用  $\delta Q_k$  表示,

$$|\delta Q_k| = \frac{H_{\text{in}}}{\sqrt{2k^3}}, \quad (25)$$

$H_{\text{in}}$  是暴涨期间的哈勃常数. 值得注意的是, 在暴涨期间, Quintessence 场的动能被稀释掉, 所以在暴涨结束后, Quintessence 的能量密度是以势能起主导作用, 一直到它进入追踪区域, 这时的时间为  $\tau_1$ . 在文献 [14] 中从暴涨结束到  $\tau_1$  的这段时间被称作势能阶段 (potential phase). 在此阶段中,  $\rho_Q$  几乎不随时间变化, 并且  $c_Q^2 \simeq -w_B - 2$ <sup>[13]</sup>, 因此有  $\beta \simeq 0$ ,  $V'' \simeq 0$ . 可以看出, 在势能阶段  $\delta Q$  是一个常数. 但是到了追踪阶段 ( $\tau > \tau_1$ ),

$$c_Q^2 = w_Q,$$

$$\beta = \frac{9}{4} (1 - w_Q) (w_B + w_Q + 2) =$$

$$\frac{9}{4}(1-w_0)\left(\frac{7}{3}+w_0\right). \quad (26)$$

因为  $-1 < w_0 \leq 1/3$ , 所以有  $\beta > 1/4$ , 因而

$$\begin{aligned} \nu^2 &< 0, \\ \nu &= i|\nu| = i\sqrt{\beta-1/4}, \\ J_{\pm}(k\tau) &\simeq \frac{\exp\left(\pm i|\nu|\ln\frac{k\tau}{2}\right)}{\Gamma(1\pm i|\nu|)}. \end{aligned} \quad (27)$$

把  $J_{\pm}(k\tau)$  (方程(27)) 和  $\delta Q_k$  (方程(25)) 代入方程(22), 就可以得到  $\delta Q_k$ .

就本文讨论的 Quintessence 模型(9), 数值求解了  $\delta Q$  的运动方程(19). 在图 2 中, 给出了  $\delta Q_k$  随红移  $z$  的变化关系. 可以看出, 在势能阶段,  $\delta Q_k$  不发生改变, 即,  $\delta Q_k = \delta Q_{kd}$ . 进入追踪阶段以后,  $\delta Q_k$  始振荡, 其振幅按  $\propto \tau^{-1/2}$  的规律衰减. 这和我们的解析分析是一致的.

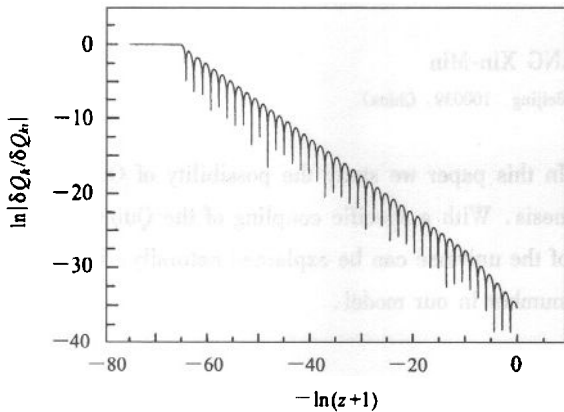


图 2  $\delta Q_k$  随红移  $z$  的变化

当重子数不对称在温度  $T_D$  发生冻结时, 对应的  $\delta Q_k$  表示为  $\delta Q_{kd}$ ,  $\delta Q_{kd}$  和  $\delta Q_{ki}$  的关系为

$$\left|\frac{\delta Q_{kd}}{\delta Q_{ki}}\right| \leq \left(\frac{\tau_i}{\tau_D}\right)^{1/2} = \left(\frac{T_D}{T_i}\right)^{1/2}, \quad (28)$$

$T_i$  是  $Q$  从势能阶段向追踪阶段过渡时的温度. 因为  $\delta Q_{ki} = H_{in}/\sqrt{2k^3}$ , 所以有

$$|\delta Q_{kd}| \leq \frac{H_{in}}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{T_D}{T_i}\right)^{1/2} \quad (29)$$

按照文献[16]的方法, 通过计算可以得到

$$\left(\frac{\delta n_B}{n_B}\right)_k \leq \frac{H_{in}}{4\pi} |V'(Q_D)/V(Q_D)| \left(\frac{T_D}{T_i}\right)^{1/2}. \quad (30)$$

把 Quintessence 势函数(9)代入到方程(30), 就可以得到重子数的变化

$$\left(\frac{\delta n_B}{n_B}\right)_k \leq \frac{H_{in}}{4\pi} |V'(Q_D)/V(Q_D)| \left(\frac{T_D}{T_i}\right)^{1/2} = \frac{H_{in}}{4\pi} \frac{f}{Q_D^2} \left(\frac{T_D}{T_i}\right)^{1/2} \quad (31)$$

对于本文研究的模型(9),  $Q$  的初始值一般都很小. 在  $f = 1 M_{pl}$  条件下, Quintessence 场在温度  $T_i \sim 10^{15}$  GeV 时就可以进入追踪区域. 当  $T_D$  在  $10^8 - 10^{11}$  GeV 区间时,  $Q$  场大约是在  $5 \times 10^{-3} M_{pl}$  的量级. 所以方程(31)可以具体写成

$$\left(\frac{\delta n_B}{n_B}\right)_k \leq \frac{10^4}{\pi} \frac{H_{in}}{M_{pl}} \left(\frac{T_D}{T_i}\right)^{1/2} \quad (32)$$

现在观测给出  $\frac{H_{in}}{M_{pl}} < 10^{-6}$ , 很显然, 方程(32)中重子数的扰动只与因子  $\frac{T_D}{T_i}$  有关. 由于  $T_D \leq T_i$ ,  $\left(\frac{\delta n_B}{n_B}\right)_k$  的上限为

$$\left(\frac{\delta n_B}{n_B}\right)_k \sim \frac{10^4}{\pi} \frac{H_{in}}{M_{pl}}.$$

值得指出, 研究等曲率扰动在微波背景辐射中的应用需要利用 CMBFAST 大型程序进行精确地运算, 过程比较复杂, 我们将另文讨论.

## 4 小结

我们研究了暗能量 Quintessence 场的物理性质. 基于 Quintessence 与物质场的相互作用(2)式, 讨论了重子不对称产生机制和重子数等曲率扰动. 对于 Quintessence 模型(9), 我们的计算结果显示  $n_B/s \sim 10^{-10}$ , 给出了一个将暗能量和物质与反物质不对称产生机制统一描述的物理模型.

感谢李明哲同学和冯波同学的有益的讨论和帮助.

## 参考文献 (References)

- 1 Bennett C L et al. astro-ph/0302207; Spergel D N et al. astro-ph/0302209
- 2 For a review, see Weinberg S. Rev. Mod. Phys., 1989, **61**:1—23
- 3 Ratra B, Peebles P J E. Phys. Rev., 1988, **D37**:3406—3427; Wetterich C. Nucl. Phys., 1988, **B302**:302—306; Frieman J A, Hill C T, Stebbins A et al. Phys. Rev. Lett., 1995, **75**:2077—2080
- 4 Uzan J P. Phys. Rev., 1999, **D59**:123510(1—10); Chiba T. Phys. Rev., 1999, **D60**:083508(1—14); CHEN X, Kamionkowski M. Phys. Rev., 1999, **D60**:104036(1—11); Perrotta F, Baccigalupi C, Matarrese S. Phys. Rev., 2000, **D61**:023507(1—12)
- 5 Peccei R D. hep-ph/0009030
- 6 Kolda C, Lyth D H. Phys. Lett., 1999, **B458**:197—201
- 7 Carroll S M. Phys. Rev. Lett., 1998, **81**:3067—3070
- 8 LI Ming-Zhe, WANG Xiu-Lian, FENG Bo et al. Phys. Rev., 2001, **D65**:103511(1—5)
- 9 Trodden Mark. hep-ph/0302151; De Felice Antonio, Nasti Salah, Trodden Mark. Phys. Rev., 2003, **D67**:043509(1—9)
- 10 Brandenberger Robert H, Yamaguchi Masahide. hep-ph/0301270; Chiba T et al. hep-ph/0304102; Yamaguchi Masahide. hep-ph/0211163; LI Ming-Zhe, ZHANG Xin-Min. hep-ph/0209093
- 11 Kolb, Turner E W. The Early Universe, 1990. 47—86
- 12 Steinhardt P J, WANG L, Zlatev I. Phys. Rev., 1999, **D59**:123504(1—13)
- 13 Brax P, Martin J, Riazuelo A. Phys. Rev., 2000, **D62**:103505(1—11)
- 14 Abramo L R, Finelli F. Phys. Rev., 2001, **D64**:083513(1—10)
- 15 Kawasaki M, Moroi T, Takahashi T. astro-ph/0108081
- 16 Turner M S, Cohen A, Kaplan D. Phys. Lett., 1989, **B216**:20—30

## Dark Energy and Baryon Isocurvature Perturbation

WANG Xiu-Lian<sup>1)</sup> ZHANG Xin-Min

(Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China)

**Abstract** Quintessence is a possible candidate for dark energy. In this paper we study the possibility of Quintessence interacting with the ordinary matter and its implications in baryogenesis. With a specific coupling of the Quintessence to the baryon fields, we will show that the baryon number asymmetry of the universe can be explained naturally. We will also in this paper study the isocurvature perturbation of the baryon number in our model.

**Key words** dark Energy, baryon number asymmetry, isocurvature perturbation

Received 11 April 2003

\* Supported by NSFC (10047004)

1) wangxl@mail.ihep.ac.cn