

电子储存环中插入元件的非线性束流动力学的 Lie 代数方法*

李永军¹⁾ 王琳 冯光耀 徐宏亮 李为民 刘祖平

(中国科学技术大学国家同步辐射实验室 合肥 230029)

摘要 介绍了用能保证哈密顿系统“辛”性质的 Lie 映射方法来研究电子储存环中的插入元件对束流动力学的影 响, 并以此方法对合肥光源中将要安装的波荡器 UD-1 对储存环的影响作了初步的研究.

关键词 电子储存环 插入元件 哈密顿系统 Lie 代数和 Lie 映射

1 引言

具有数目众多的长直线节, 并在其中安装插入元件——波荡器, 来得到高亮度的相干同步辐射是三代同步辐射光源储存环一个主要特征. 同时, 用于未来直线对撞机前端注入器的阻尼环中也需要数目众多的扭摆磁铁来将束流发射度快速地阻尼后注入后续的直线加速器. 研究这些插入元件对束流的影响, 特别是非线性动力学方面的问题, 已成为一个非常有实际意义的课题. 近年来, Lie 代数方法在研究束流非线性动力学方面的长足和快速的发展, 特别是 Lie 代数可以给出储存环一圈的映射, 可综合评估和优化整个机器非线性效应, 并摆脱传统的、极为耗时的逐个元件跟踪方法. 另外, Lie 映射保持了哈密顿系统的“辛”性质, 从而保证了在作粒子长程跟踪研究时不会产生非物理的结果. 国内已有文献报告了用 Lie 代数来研究粒子通过磁螺旋管时的动力学行为^[1].

插入元件是用一系列磁铁有序排列而形成周期性变化的磁场, 它对束流动力学影响是多方面的, 如导致束流轨道、工作点、 β 函数、动力学孔径, 以及束流发射度发生变化. 本文将研究重点放在插入元件对束流动力学产生的非线性效应上.

2 插入元件的磁场及其矢势

采用 Halbach 的模型²⁾ 来描述插入元件的磁场 (插入元件三维场形更为精确的描述可以参考文献 [2]). 不考虑边缘效应, 插入元件周期性变化的磁场可写成如下形式:

$$\begin{cases} B_x = \frac{k_x}{k_y} B_0 \sinh k_x x \cdot \sinh k_y y \cdot \cos kz \\ B_y = B_0 \cosh k_x x \cdot \cosh k_y y \cdot \cos kz \\ B_z = -\frac{k}{k_x} B_0 \cosh k_x x \cdot \sinh k_y y \cdot \sin kz \end{cases}, \quad (1)$$

其中 x, y 为横向坐标, z 为束流前进方向 (纵向), $k = 2\pi/\lambda$ 是插入元件沿纵向的波数, λ 是一个磁周期的长度, k_x, k_y 分别为横向的波数, 并且有以下关系:

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (2)$$

由 Maxwell 方程 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 并且采用 $A_z = 0$ 的约定, 可以得到该磁场的矢势表达

$$\begin{cases} A_x = \frac{1}{k} B_0 \cosh k_x x \cdot \cosh k_y y \cdot \sin kz \\ A_y = -\frac{k_x}{k \cdot k_y} B_0 \sinh k_x x \cdot \sinh k_y y \cdot \sin kz \\ A_z = 0 \end{cases}. \quad (3)$$

如果考虑平面型的插入元件, 即磁极面足够宽, $k_y =$

2002-11-04 收稿, 2003-01-10 收修改稿

* 国家重大科学工程 (NSRL 二期工程) 基金, 中国科学院创新工程支持项目资助

1) E-mail: liyj@ustc.edu.cn

2) L. Smith, Effects of wigglers and undulators on beam dynamics, LBL-21391, ESC-18, 1986

0, 则有 $k = k_y$, 矢势可进一步简化表示为

$$\begin{cases} A_x = \frac{1}{k} B_0 \cosh ky \cdot \sin kz \\ A_y \\ A_z \end{cases} \quad (4)$$

3 粒子在插入元件磁场中的哈密顿量及 Lie 映射

在相对论情形下, 带电粒子在电磁场中的哈密顿量表示为^[3]

$$H = \sqrt{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\varphi, \quad (5)$$

其中 \mathbf{P} 为粒子的动量矢量, \mathbf{A} 为电磁场矢势, m 为粒子静止质量, c 为光速, e 为粒子的电荷, φ 为电磁场标势. 在加速器理论中, 通常将哈密顿量中的自由变量从时间转换为纵轴 z ^[4]. 通过一个正则变换, 新的哈密顿量为

$$H^* = -p_z = - \left[\frac{(H - e\varphi)^2}{c^2} + m^2 c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2 \right]^{1/2} - eA_z, \quad (6)$$

其中 $x, p_x; y, p_y; t, -H$ 为三组共轭正则变量. 忽略加速场 $\varphi = 0$, 同时认为粒子的动能远大于静止能量, 即 $H \gg mc^2$, 哈密顿量可写成

$$H^* = - \left[\frac{H^2}{c^2} - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2 \right]^{1/2} - eA_z, \quad (7)$$

这里 $\frac{H^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} = \frac{E_0^2}{c^2} (1 + \delta)^2 = p_0^2 (1 + \delta)^2$. 通常用 x ,

$x' = \frac{p_x}{p_0}$ 和 $y, y' = \frac{p_y}{p_0}$ 表示粒子相运动的横向位置, 因此通过进一步正则变换将哈密顿量变成

$$\tilde{H} = - \left[(1 + \delta)^2 - \left(x' - \frac{e}{p_0} A_x \right)^2 - \left(y' - \frac{e}{p_0} A_y \right)^2 \right]^{1/2} - eA_z, \quad (8)$$

这里不考虑有能量偏差的粒子 ($\delta = 0$), 方括号中后两项相对于第一项 1 均为小量, 所以作泰勒展开后得到

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left(x' - \frac{e}{p_0} A_x \right)^2 + \left(y' - \frac{e}{p_0} A_y \right)^2 - \frac{e}{p_0} A_z, \quad (9)$$

上式中已将常数 1 从哈密顿量中去除, 因为在哈密

顿量加上一个任意常数均不会影响它所代表的动力学系统的性质.

将上节得到的插入元件矢势表达式(4)代入式(9), 得到粒子在该插入元件中哈密顿量

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left(x'^2 - \frac{2eB_0}{p_0 k} x' \cosh ky \cdot \sin kz + \frac{e^2 B_0^2}{p_0^2 k^2} x'^2 \cosh^2 ky \cdot \sin^2 kz + y'^2 \right). \quad (10)$$

4 Lie 映射的泰勒展开和辛积分方法

4.1 Lie 映射的泰勒展开

将我们在前面已经得到表征粒子动力学行为的哈密顿量展开成 $x, x'; y, y'$ 的泰勒级数

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z) = & - \frac{eB_0}{p_0 k} \sin kz \cdot x' \quad \cdots \text{二极分量} \\ & + \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 \quad \cdots \text{漂移段} \\ & + \frac{e^2 B_0^2}{2p_0^2 k^2} \sin^2 kz \cdot k^2 y^2 \quad \cdots \text{四极分量} \\ & - \frac{eB_0}{2p_0 k} \sin kz \cdot k^2 y^2 \cdot x' \quad \cdots \text{六极分量} \\ & + \frac{e^2 B_0^2}{6p_0^2 k^2} \sin^2 kz \cdot k^4 y^4 \quad \cdots \text{八极分量} \\ & + \cdots (\text{高阶项}), \end{aligned} \quad (11)$$

上式中我们保留泰勒级数到四阶, 即磁场的八极分量. 其中各阶磁场分量对应的哈密顿量已在公式中表明. 从(11)式可以发现, 插入元件的二极场和六极场沿 z 轴的变化是 $\sin kz$, 而四极场和八极场沿 z 轴的变化是 $\sin^2 kz$. 所以, 束流感受到的二极场和六极场的平均效应为 0, 但四极场和八极场的平均效应不为 0. 因此, 插入元件对于储存环中粒子动力学的影响是: (1) 在竖直方向存在的四极场对束流有一聚焦作用, 造成储存环该方向上工作点发生漂移; (2) 八极场的存在将会减小储存环的动力学孔径.

这里的哈密顿量是依赖 z 的, 因此可以将插入元件沿 z 轴分切成薄片, 在每个薄片内, 可以认为哈密顿量是常数. 根据 Lie 代数, 粒子在通过这样的每个薄片时的映射可以写成^[5]

$$M(z, z + \Delta z) = e^{i \Delta \tilde{H}(z)}. \quad (12)$$

由(11)式, 得到具体的每个分量的映射关系为

$$\left\{ \begin{aligned} Mx &= x + \Delta z \cdot x' - \Delta z \frac{eB_0}{p_0 k} \sin kz - \\ &\quad \Delta z \frac{eB_0}{2p_0 k} \sin kz \cdot k^2 y^2 + \dots \\ Mx' &= x' + \dots \\ My &= y + \Delta z \cdot y' + \dots \\ My' &= y' - \Delta z \frac{e^2 B_0^2}{p_0^2 k^2} \sin^2 kz \cdot k^2 y + \\ &\quad \Delta z \frac{eB_0}{p_0 k} \sin kz \cdot x' k^2 y \\ &\quad - \Delta z \frac{e^2 B_0^2}{6p_0^2 k^2} \sin^2 kz \cdot k^4 y^3 + \dots, \end{aligned} \right. \quad (13)$$

粒子通过整个插入元件的映射

$$M_{total} = M(0, \Delta z) \cdot M(\Delta z, 2\Delta z) \dots M((n-1)\Delta z, n\Delta z), \quad (14)$$

式(14)中已将整个插入元件均分成步长为 Δz 的 n

Lie 映射的辛积分

在(11)式中,将哈密顿量展开式中四阶以上的项予以忽略,而下面介绍用辛积分方法作精确的处

同样,首先将整个插入元件分成步长为 Δz 的 n 段,每段中哈密顿量为

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z) &= \frac{1}{2} \left(x' - \frac{e}{p_0} A_x \right)^2 + \frac{1}{2} \left(y' - \frac{e}{p_0} A_y \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (x' - a_x)^2 + \frac{1}{2} (y' - a_y)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (x' - a_x)^2 + \frac{1}{2} y'^2 \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$a_x = \frac{e}{p_0} A_x = \frac{eB_0}{p_0 k} \cosh ky \cdot \sin kz, a_y = \frac{e}{p_0} A_y = 0,$$

根据 BCH 定理^[5]和辛积分,粒子通过每个薄片的 Lie 映射为

$$M(z, z + \Delta z) = e^{i-\Delta z \tilde{H}(z)} = M_1 M_2 M_1 = e^{i-\frac{\Delta z}{2} \frac{(x'-a_x)^2}{2}}; e^{-\Delta z y'^2}; e^{i-\frac{\Delta z}{2} \frac{(x'-a_x)^2}{2}} \quad (16)$$

上式右边的第一项和第三项可以根据 Lie 映射的相似变换^[5,11]写成

$$M_1 = e^{i-\frac{\Delta z}{2} \frac{(x'-a_x)^2}{2}} = e^{i-\int a_x dx}; e^{-\frac{\Delta z}{2} x'^2}; e^{i\int a_x dx} \quad (17)$$

式(17)右边的每一个 Lie 映射均为可解的,其各个分量为

$$\left\{ \begin{aligned} x &= M_1 x_0 = x_0 + \frac{\Delta z}{2} \left(x'_0 + \frac{eB_0}{p_0 k} \cosh ky_0 \cdot \sin kz \right) \\ x' &= M_1 x'_0 = x'_0 \\ y &= M_1 y_0 = y_0 \\ y' &= M_1 y'_0 = y'_0 + \frac{eB_0}{p_0 k} \sinh ky_0 \cdot \\ &\quad \sin kz \cdot (kx - kx_0) \end{aligned} \right. \quad (18)$$

而映射 $M_2 = e^{i-\Delta z y'^2}$ 为一 y 方向上自由漂移段,其各个分量为

$$\left\{ \begin{aligned} x &= M_2 x_0 = x_0 \\ x' &= M_2 x'_0 = \\ y &= M_2 y_0 = y_0 + \Delta z \cdot y'_0 \\ y' &= M_2 y'_0 = \end{aligned} \right. \quad (19)$$

5 应用

根据上述理论,我们编写了一个 C++ 语言粒子模拟跟踪程序用来研究合肥光源中二期工程新安装的 Undulaor(UD-1)^[2]对储存环束流动力学的影响.程序中,粒子在通过线性元件时用传输矩阵来描述,在通过六极铁等非线性元件时用 Lie 映射来描述;插入元件的每个周期均被分成 10 等份,每等份内的哈密顿量被认为是常量,粒子在通过时,分别可以用 4.1 和 4.2 给出的 Lie 映射来描述.由 NSRL 设计的 UD-1 是我国大陆第一台用以产生高亮度同步辐射的波荡器,长约 2.7m,有 29 个周期,由上海克林公司加工,并已完成离线调试和磁场测量,各项指标均达到或优于设计要求.在 60mm 的磁间隙变化范围全程中,磁场重复性良好;主磁场一次积分值小于 1 Gs·m,二次积分值小于 1 Gs·m²;位相误差为 3°左右,在有些磁间隙下小于 2°,远好于预期值.UD-1 的具体参数列在表 1 中.合肥光源的主要参数则列在表 2 中.

图 1 给出粒子在通过 UD-1 时的理想轨道,分别采用 4.1 和 4.2 给出方法进行计算,在计算精度内,两种方法得到粒子的理想轨道是一样的.这说明在

1) Y. Wu, Explicit Higher Order Symplectic Integrator for s-Dependent Magnetic field, 2001(Unpublished)

2) 国家同步辐射实验室二期工程预研报告(内部资料)

轨道附近将哈密顿量展开到四阶已是非常精确的.

表 1 UD-1 的主要参数

参数名称	参数值
总长度/m	2.668
周期长度/mm	92
周期数	29
磁极间隙/mm	36—96
磁场强度(峰峰值)/Tesla	0.456—0.06
运行能量/MeV	800

表 2 合肥光源的主要参数

参数名称	参数值
能量/MeV	800
周长/m	66.1308
周期数	4
工作点	3.58/2.58
高频频率/MHz	204
束流发射度/nm·rad	133

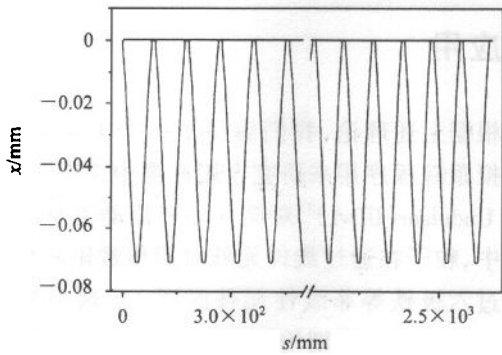


图 1 粒子通过 UD-1 时的理想轨道

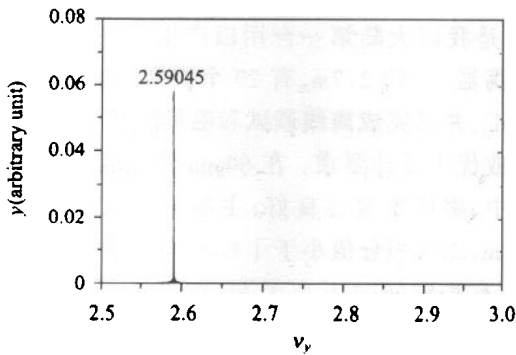


图 2 竖直方向上粒子小振幅振荡的频谱

在通用光源运行模式(GPLS)下,通过对粒子作小振幅($x = y = 0.1\text{mm}$)振荡跟踪结果作快速傅立叶变换(FFT)来得到储存环工作点.结果发现水平方向工作点没有变化;而在竖直方向上,由于 UD-1 磁

场中存在四极分量,工作点则从 2.58 增加到 2.59.图 2 给出竖直方向上粒子运动的频谱.图 3 给出了插入元件 UD-1 的磁间隙为 36mm,初始振荡振幅为 $y = 4\text{ cm}$ 时,粒子在横向运动的相图.从图 3 中可以看出,粒子运动的相图呈四边型,这是由于 UD-1 八极场分量的存在造成的.图 4 给出了 UD-1 对储存环动力学孔径的影响.从跟踪的结果可以看出,插入 UD-1 后,动力学孔径在水平方向没有明显的变化,而在竖直方向则减少了近 50%.但是由于 GPLS 模式本身的动力学孔径非常之大,插入 UD-1 后的动力学孔径依然能满足机器运行的要求.

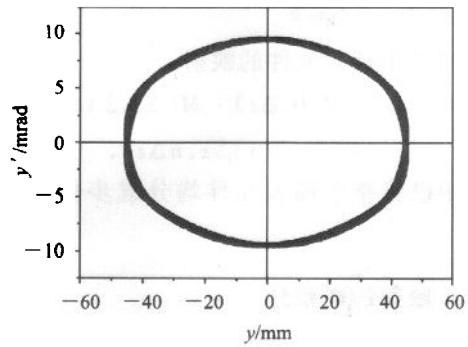


图 3 粒子在 $y\text{-}y'$ 相空间的运动轨迹

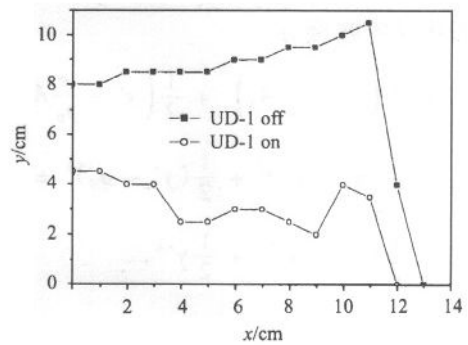


图 4 UD-1 对储存环动力学孔径的影响

6 结论

用 Lie 代数方法初步研究了合肥光源中二期工程新安装的 Undulaor(UD-1)对储存环束流动力学的影响.在这里使用了一个简单的 Undulaor 模型,即(1)式,来描述磁场,实际的磁场应该通过磁测数据获得.但总能将它分解为形如(1)式的 Fourier 级数迭加.另外一个有意义的问题是如何考虑磁场缺陷对储存环的影响,包括如何引入符合 Maxwell 方程组的磁场缺陷.将对粒子的跟踪研究扩展到三维,即包括纵向运动,也是下一步要进行的工作.

作者对 DESY 的 Dr. D. Winfried 和 Dr. K. Balewski 有益的探讨和编写程序时所给予的指导和帮助表示感谢。同时感谢 NSRL 同仁们提供了有关 UD-1 的参数。

参考文献 (References)

- 1 LÜ Jian-Qin. HEP & NP, 2002, **26**(2):186—191 (in Chinese)
(吕建钦. 高能物理与核物理, 2002, **26**(2):186—191)
- 2 WANG Pei-Wei et al. HEP & NP, 1996, **20**(5):468—475 (in Chinese)
- 3 Jackson J D. Classical Electrodynamics. 3rd Ed. New York: John Wiley & Sons Inc. 1998
- 4 Courant E, Snyder H. Annals of Physics, 2000, **281**:360—408
- 5 Dragt. AIP Proc. **87**, Phys. High Energy Accel., Fermilab, 1981

Study of Insertion Device's Influence on Nonlinear Beam Dynamics in Electron Storage Ring Using Lie Algebra*

LI Yong-Jun¹⁾ WANG Lin FENG Guang-Yao XU Hong-Liang LI Wei-Min LIU Zu-Ping

(National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230029, China)

Abstract In designing the 3rd generation synchrotron radiation light source, many long, and dispersion free straight sections are left for installing undulators to produce coherent radiation. For the damping ring used as pre-injector of next generation linear collider, many wigglers are used to increase radiation damping rate. So it is important to understand those Insertion devices' (ID) influence on beam dynamics in design and optimization stage. This paper introduces the study of insertion device's influence on beam dynamics in electron storage ring using the symplectic Lie mapping. Firstly the Hamiltonian of charged particle's motion along ID axis is given, then two methods are adopted to analyse ID's influence on beam dynamics. One method is expanding Hamiltonian to 4th order Taylor series, then all kinds of multipole components (till to octupole) can be obtained; another is constructing a second order symmetrical, symplectic integrator using Lie map product by similar transformation directly. The simulation results show those two methods are consistent. The primary results of influence on beam dynamics of UD-1, a new undulator which will be installed in Hefei Light Source storage ring soon, are also given. The tune-shift and decrease of dynamic aperture caused by UD-1 can be found in simulation results.

Key words electron storage ring, insertion device, Hamiltonian system, Lie algebra and Lie mapping

Received 4 November 2002, Revised 10 January 2003

* Supported by National Key Project (NSRL Phase II Project), Knowledge Innovation Project of CAS

1) E-mail: lij@ustc.edu.cn