二维模糊球上的量子霍尔流体

罗旭东　彭丹涛

(西北大学现代物理研究所　西安　710069)

摘要　在回顾了Haldane对量子Hall效应在二维球面S^2上的描述后,本文构造了二维模糊球S^2上的非对易代数及其Hilbert空间的Moyal结构.通过构造模糊球上不可压缩量子霍尔流体的非对易Chern-Simons理论,求解具有准粒子源的Gaussian约束,找出模糊球上的Calogero矩阵及最低Landau能级Laughlin波函数的完全集,此Laughlin波函数由旋量坐标推广的Jack多项式表示.

关键词　量子霍尔流体(QHF)　模糊球　非对易Chern-Simons　Laughlin波函数

1 引言

在凝聚态物理和理论物理中,量子霍尔效应是一个非常重要的研究课题.二十多年以前,Laughlin[1]提出用不可压缩量子霍尔流体(IQHF)的概念来描述分数量子霍尔效应(FQHE).不久,Haldane[2]分析了在径向磁场$B=\frac{\hbar S}{eR^2}$(Dirac单极)下、半径为R的球面上的N体二维电子气的情形,其中$2S$是一个由Dirac量子化条件决定的整数.这个模型描述的IQHF具有平移不变性.

2001年,Susskind等人对量子霍尔效应提出了在非对易平面$\mathbb{R}^2$[3]和模糊球S^2[4]上的非对易Chern-Simons理论.张首晟和胡江平[5,6]又将量子霍尔效应推广到了非对易的四维模糊球S^4上.在$\mathbb{R}^2$上,Polychronokas[7]由具有边界场ψ(等价于Wilson圈[8])的有限Chern-Simons矩阵模型给出了平面上非对易理论的正则化形式.Hellerman和Raamsdonk[9]又考察了与此相对应的由Chern-Simons矩阵描述的Laughlin型波函数.Karabali和Sakita[10]由Calogero模型的能量本征函数给出了此Laughlin波函数的精确形式。这一系列工作引起了人们的极大兴趣来将弦、膜理论和量子霍尔效应联系起来[11,12].

特别是在文献[4]中已经看到在二维模糊球上的不可压缩电子气如何由Taub-Nut空间捕获巨引力子的分析,因此将这些结果推广到二维模糊球S^2上是一件很有意义的工作.

本文运用我们熟悉的模糊球上对孤粒子的描述,限制在最低Landau能级(LLL),将给出Dirac单极背景下描述最低Landau能级单粒子波函数ψ_i的集合.由ψ_i组成的波函数集,可以构造出不可压缩流体的共同基态波函数ψ_{gr}.但是为了获得激发态的Laughlin波函数,必须引入具有准粒子源的Gaussian约束方程.

我们注意到在平面$\mathbb{R}^2$[6,12],圆柱面[13],环面$\mathbb{T}^2$[14]和四维模糊球S^4[12]上的量子霍尔液滴,两个(或者4个)基本的$n\times n$矩阵依赖于非对易孤粒子的动力学对$q_i,p_i(i=1,2,\cdots,n)$.在将具有Weyl不变性的moment map方程作用在这些矩阵上后,得到的解分别是Calogero,Sutherland、椭圆和球面Calogero模型算符.量子化哈密顿算符的波函数则变为Jack多项式$J_{\{\lambda\}}$或是它的推广.

2 绕Dirac单极带电粒子的最低Landau能级波函数

二维球面S^2可以看做是一陪集空间,可通过第一Hopf丛来实现

$$S^2\sim\frac{S^3}{S^1}\sim\frac{SU(2)}{U(1)}.\tag{1}$$

在此球面上围绕Dirac磁单极运动的电荷为e的单

2004-03-08收稿

粒子的哈密顿量为

$$H = \frac{|\boldsymbol{\Lambda}|^2}{2MR^2} = \frac{\omega_C |\boldsymbol{\Lambda}|^2}{2\hbar S}, \tag{2}$$

这里 M 是粒子的有效质量,R 是二维球面 S^2 的半径,$\omega_C = \frac{eB}{M}$ 是粒子运动的回旋频率.$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{r} \times [-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})]$ 是动力学轨道角动量,其中 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 是与粒子耦合的 $U(1)$ 规范场:$\nabla \times \boldsymbol{a} = B\hat{r}$,$B = \frac{\hbar S}{eR^2}$ 是磁场强度,其中 $\hat{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{[r]}$。动力学角动量 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对易关系为:$[\Lambda^\alpha, \Lambda^\beta] = i\hbar\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(\Lambda^\gamma - B\hat{r}^\gamma)$,此对易关系非闭合。这个哈密顿量具有旋转不变性,相应的群流形是 S^3,其生成元

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times [-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})] + \hbar S\frac{\boldsymbol{r}}{|r|} \equiv \boldsymbol{\Lambda} + \hbar S\hat{r} = \boldsymbol{\Lambda} + \hbar \boldsymbol{S}, \tag{3}$$

满足对易关系[2]:

$$[L^\alpha, T^\beta] = i\hbar\epsilon^{\alpha\beta\gamma}T^\gamma, \boldsymbol{T} = \boldsymbol{L}, \boldsymbol{r} \text{ 或 } \boldsymbol{\Lambda}. \tag{4}$$

算符 $\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{L}^2, L^3$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}^2$ 可以被同时对角化,他们共同的本征函数是

$$\psi^J_{m,s} = D^J_{m,s}(\alpha,\beta,\gamma), J \geqslant |s|, m = -J,\cdots,J, \tag{5}$$

其中 $D^J_{m,s}(\alpha,\beta,\gamma)$ 是有限旋转矩阵元,指标 J, m 和 s 分别是 $\boldsymbol{L}^2, L^3$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的本征值。Euler 角 $\omega = (\alpha,\beta,\gamma)$:$\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = \gamma(\phi,\theta)$ 具有 $U(1)$ 规范自由度.(对 Dirac 或 Wu-Yang 和 Schwinger 规范,参数 γ 分别为 $-\phi, \phi$ 和 0).在最低 Landau 能级(LLL)($J = s$,能量为 $\frac{1}{2}\hbar\omega_C$),波函数为

$$\psi_m = D^s_{m,-s}(\alpha,\beta,\gamma), \quad m = -s,\cdots,s. \tag{6}$$

且可以进一步写为

$$\psi_m = D^s_{m,-s}(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{s+m}\sqrt{\frac{2s!}{(s+m)!(s-m)!}}u^{s-m}v^{s+m} = (1+|\zeta|^2)^{-s}\zeta^{s-m}e^{is\gamma}\sqrt{\frac{2s!}{(s+m)!(s-m)!}}, \tag{7}$$

其中测地投影坐标 $\zeta = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp(-i\phi) = \frac{v}{u}$,其中 u, v 是旋量变量

$$u = \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(\frac{i\phi + i\gamma}{2}\right) = D^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\phi,\theta,\gamma),$$

$$v = \sin\frac{\theta}{2}\exp\left(\frac{-i\phi + i\gamma}{2}\right) = D^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\phi,\theta,\gamma). \tag{8}$$

此时 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_N$ 由围绕 Dirac 单极 $g(s = ge)$ 的 $N = 2s + 1$ 个单粒子波函数 $\psi^s_m(m = -s,\cdots,s)$ 组成。作用在这 $2s+1$ 个态上的算符是协变 $(2s+1)\times(2s+1)$ 矩阵,作为不可约张量集,归一化后应该是

$$(X^J_M)_{m',m} = \begin{pmatrix} s & J & s \\ -m & M & m' \end{pmatrix},$$

$$0 \leqslant J \leqslant 2s, 0 \leqslant M \leqslant J, \tag{9}$$

其中(:::)表示 3j 符号。这些算符构成了模糊球上非对易代数 $\mathscr{A}_N$ 的右模[15],其矩阵乘积为[16]

$$\sum_m (X^{J_1}_{m_1})_{lm}(X^{J_2}_{m_2})_{mn} = \sum_{J,M}\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ s & s & s \end{Bmatrix}(X^J_M)_{ln}, \tag{10}$$

其中{:::}是 6j 符号.此矩阵乘积也等价于由下面方法得到的在模糊球上的 Moyal * 乘积[17]:首先,在测地投影坐标 ζ 和 $\bar{\zeta}$ 下由 Peremolov[18] 给出的自旋相干态波函数

$$|\omega) \equiv |\theta,\phi) = \sum_m D^s_{m,-s}(\phi,\theta,-\phi)|s,m\rangle, \tag{11}$$

满足

$$\frac{N}{8\pi^2}\int d\omega\, |\omega)(\omega| = 1, \quad N = 2s+1.$$

算符 X^J_m(9)的 Symbol 定义为

$$D^J_m(\theta,\phi) \equiv (\omega|X^J_m|\omega) = D^J_{m,-J}(\phi,\theta,-\phi) = \sqrt{\frac{2J!}{(J+m)!(J-m)!}}u^{J+m}v^{J-m}, \tag{12}$$

其中 $|\omega)$ 是陪集空间 $\frac{SU(2)}{U(1)}$ 的相干态(11)式,且

$$X^J_m = \frac{2s+1}{4\pi}\int d\omega D^J_m(\theta,\phi)\,|\omega(\theta,\phi))(\omega(\theta,\phi)|, \tag{13}$$

两个算符 $X^{J_1}_{m_1}$ 和 $X^{J_2}_{m_2}$ 乘积的 Symbol 等于两个 Symbol 的 * 乘积(Moyal 乘积),即

$$D^{J_1}_{m_1,-J_1} * D^{J_2}_{m_2,-J_2} = \sum_{Jm}(-1)^{J_2-J_1-m}(2J+1) \times \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ s & s & s \end{Bmatrix} D^J_{m,-J}. \tag{14}$$

显然这是模糊球 S^2 上代数 $\mathscr{A}_N$ 右模的 * 乘积的特例[15].

至此仅仅只是考虑了最低 Landau 能级单粒子波函数的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_N$ 和作用在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_N$

上的非对易代数 $\mathscr{A}_N$,还没有引入不可压缩量子霍尔流体(IQHF)的概念.类似于Haldane[2]和张首晟、胡江平[5],可以简单地假定 N 粒子体系的基态波函数能由(7)式的Slater行列式表达为

$$\psi = \sum_{\sigma}\epsilon^{\sigma(1)\cdots\sigma(n)}\psi_{\sigma(1)}(\omega_1)\cdots\psi_{\sigma(n)}(\omega_n) = \prod_{i<j}(u_iv_j - u_jv_i). \tag{15}$$

此处 $u_i\equiv u(\omega_i)$ 和 $v_i\equiv v(\omega_i)$ 是第 i 个粒子的旋量坐标.

3 模糊球上的Chern-Simons矩阵理论

在文献[3]中,Susskind提出了$\mathbb{R}^2$上的非对易Chern-Simons理论,它描述在稳恒磁场 B 中不可压缩电子气的保面积规范变换,其中保面积规范为

$$X_i = x_i + \epsilon_{ij}\frac{\hat{A}_j}{2\pi\rho_0}, \tag{16}$$

X_i 是非对易空间的坐标,它给出了电子的位置,x_i 是不可压缩电子气的随动坐标,$\hat{A}_i$ 是规范场,$\theta = \frac{1}{2\pi\rho_0}$ 是非对易参数,非对易Chern-Simons理论的作用量为

$$S = \frac{k}{4\pi}\int d^3x\epsilon_{\mu\nu\rho}\ \hat{A}_\mu\partial_\nu\hat{A}_\rho + \frac{2i}{3}\hat{A}_\mu\hat{A}_\nu\hat{A}_\rho, \tag{17}$$

其中 $k\equiv B\theta = \frac{B}{2\pi\rho_0} = \frac{1}{\nu}$,而 ν 被称作填充因子。

在非对易平面$\mathbb{R}^2$情形,Chern-Simons(CS)矩阵理论给出了一个对量子霍尔效应的有效描述.正如Susskind在文献[3]中提出的,非对易 $U(1)$ 规范势 $A_a,(a=1,2)$ 的非对易CS理论作用量描述的是不可压缩电子气的保面积规范变换.去掉一个整体的发散,这个非对易的CS理论就等价于一个矩阵模型:

$$S = \int dt\,\frac{B}{2}\mathrm{Tr}\{\epsilon_{ab}(\dot{X}_a + i[A_0,X_a])X_b + 2\theta A_0\}, \tag{18}$$

其中 $X_a,(a=1,2)$ 是两个矩阵理论中的(无限维)'靶'厄米'矩阵'[7],$[.,.]$ 是矩阵的对易子,而Tr表示在Hilbert空间中求(矩阵)迹.A_0是产生规范变换的Gaussian约束条件的Lagrangian乘子.

$$[X_1,X_2] = i\theta. \tag{19}$$

这是vortex自由不可压缩流体的约束条件.

作用量(18)描述了在稳恒磁场 B 中平面上无限多粒子构成的不可压缩流体.描述一个量子霍尔droplet动力学的有限 N 粒子系统的作用量是由Polychronakos提出的[7]:

$$S = \int dt\,\frac{B}{2}\mathrm{Tr}\{\epsilon_{ab}(\dot{X}_a + i[A_0,X_a])X_b + 2\theta A_0 - \omega X_a^2\} + \Psi^\dagger(i\dot{\Psi} - A_0\Psi), \tag{20}$$

其中靶空间坐标 $X_a,(a=1,2)$ 在矩阵理论里表示为 $N\times N$ 矩阵.Ψ 是来自droplet边界态的一个复 N 矢量.势能项 ωX_a^2 作为一个空间的正规子,破坏了作用量的空间平移不变性.

现在转到球面 S^2 情形,在二维模糊球 S^2 上Chern-Simons理论的作用量与在$\mathbb{R}^2$上的量子霍尔droplet的作用量类似:

$$S = \int dt\,\frac{B}{2}\mathrm{Tr}\{\epsilon_{ab}(\dot{X}_a + i[A_0,X_a])X_b + 2\theta A_0\} + \Psi^\dagger(i\dot{\Psi} - A_0\Psi). \tag{21}$$

其中 X_a 由$N\times N$矩阵表示,A_0为产生Gaussain约束方程的Lagrangian乘子,而 Ψ 是一个复的N矢量,它定义了 $CP(N-1)$ 模型的流形[19]且具有一个左整体的 $U(N)$ 对称性和一个右局域的 $U(1)$ 规范对称性,可以由Serberg-Witten映射将 $D0$ 流体映射到统计规范场 $\tilde{A}$.在这个作用量里,Lorentz力项 $\frac{eB}{2}\epsilon_{ab}\dot{X}_aX_b$ 给出作用量里的Chern-Simons部分,因此二维球面上的Chern-Simons拓扑不变性同平面情形一样.由$\frac{1}{2\pi\rho_0}$决定了不可压缩流体的保面积规范变换不变,其中 ρ_0 是粒子密度.就像坐标 ζ_i 与 $\bar{\zeta}_i$ 的关系一样:$\zeta_i = y_{i1} + iy_{i2}$,$\bar{\zeta}_i = y_{i1} - iy_{i2}$,模 y_i 同A_i 的关系式为:$X_i = y_i + A_i$,并且它在平面坐标系和球面测地坐标系中是一一对应的。

Ψ 的经典解可由左整体的 $U(N)$ 群进行变换

$$X_a \to UX_aU^{-1} = X_a,\ \Psi\to U\Psi, \tag{22}$$

而在右局域 $U(1)$群变换下的解为

$$\Psi\to\Psi_g(\boldsymbol{r}),\quad g(\boldsymbol{r})\in U(1). \tag{23}$$

这里右局域 $U(1)$ 群的作用来自Dirac单极,即在基空间$\mathbb{R}^2$和 S^2 上规范场 $a_\mu,(\mu=1,2)$ 的变换为

$$a_\mu \to g^\dagger a_\mu g - ig^\dagger\nabla_\mu g. \tag{24}$$

α_i 的场强被定义为协变导数 $\hat{D}$ 的曲率张量:$[\hat{D}_\mu,\hat{D}_\nu] = -i\Psi F_{\mu\nu}$,因此有

$$F_{12} = \nabla_1a_2 - \nabla_2a_1 + i[a_1,a_2] + a_3 =$$

$$-\mathrm{i}[(D_1\Psi)^{\dagger}D_2\Psi-(D_2\Psi)^{\dagger}D_1\Psi]. \tag{25}$$

将作用量(21)对 Lagrangian 乘子 A_0 变分,就可以得到 Gaussian 约束方程

$$G\equiv-\mathrm{i}B[X_1,X_2]+\Psi\Psi^{\dagger}-B\theta=0. \tag{26}$$

取约束方程的迹,有

$$\Psi^{\dagger}\Psi=NB\theta. \tag{27}$$

上式也是场 Ψ 的归一化条件.约束方程(26)的无迹部分给出 X_1 和 X_2 的对易关系式(moment map 方程):

$$[X_1,X_2]=\mathrm{i}\theta(1-N\,|\,v\rangle\langle v\,|). \tag{28}$$

其中 $|\,v\rangle$ 是一常单位矢量.定义 $A_-=\sqrt{\frac{1}{2}}(X_1+\mathrm{i}X_2)$ 和 $A_+=\sqrt{\frac{1}{2}}(\mathrm{i}X_1+X_2)$,有对易关系:

$$[A_-,A_+]=\mathrm{i}\nu(1-N\,|\,v\rangle\langle v\,|). \tag{29}$$

可以选择一组基使得 A_+ 是对角矩阵.在平面情形,矩阵 X_a 是厄米矩阵并且能被对角化.但现在在模糊球上,引入对角化的 A_+ 表示,且 A_+ 的对角元不是数值,而是动力学变量.可以选择 A_+ 是对角矩阵,其对角元是 u_i,且 A_- 的对角元为 v_i,其中 u_i 和v_i 是第 i 个准粒子中心位置的旋量坐标.

因此,在可以将相位空间扩大到一对复 Cartan 环 $H\sim\mathbb{C}^N$的启发下,至少应该将 $U(N)$ 推广到 $U(N,\mathbb{C})$ 或具有另一实形式的非紧化部分 $GL(N,\mathbb{R})$[20].但实际上,$H\sim\mathbb{C}^N$上的 Weyl 不变性应该是 D_N 型的.即它是由 Hurtubise 和 Markman 引入的对群 G_0 的 moment map,定义为:$\sum_{\alpha\in\Delta}C_\alpha\to G_0\to H$,其中 Δ 是由文献[21]中(4.8)式给出的 D_N 根空间,H 是 N 个动力学共轭对的复 N 环$\mathbb{C}^N$.$N\times N$ 的 $U(N,\mathbb{C})(\leftrightarrow GL(N,\mathbb{R}))$ 应进一步嵌入在 $2N\times 2N$ $SO^*(2N)$ 中[20],也就是说,每一个 $U(N)$ 的 $N\times N$ 矩阵元的复数对应于一个 2×2 实矩阵 $re^{\mathrm{i}\phi}\to r\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$对应.经过计算可解得一合理解

$$\begin{aligned}(A_+)_{jk}&=u_j\,\delta_{j,k},\\ (A_-)_{jk}&=v_j\,\delta_{j,k}+\mathrm{i}\nu(1-\delta_{j,k})\frac{1}{(u_j-u_k)},\end{aligned} \tag{30}$$

如同在文献[22]中给出的一样,有量子哈密顿量

$$\Delta H\Delta^{-1}=\mathrm{tr}(A_-^2), \tag{31}$$

其中

$$H=\frac{1}{2B}\Big[-\frac{1}{\Delta}\sum_i\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}\Delta+\sum_{i\neq j}\frac{v^2}{(u_i-u_j)^2}\Big]. \tag{32}$$

这里 Δ 是由下式定义的 Vandermonde 行列式

$$\Delta\equiv\det(u_i^{N-j})=\epsilon^{k_1k_2\cdots k_N}u_{k_1}^0u_{k_2}^1\cdots u_{k_N}^{N-1}=\prod_{k<l}(u_k-u_l). \tag{33}$$

在平面的情形,Laughlin 波函数的明显表达式由文献[9]给出.在量子化后,Gaussian 约束(26)式和 moment map 方程(28)要求物理态必须是 $SU(N)$ 的单态,基态是完全反对称的 $SU(N)$ 单态:

$$|\,\Psi_{gr}\rangle=[\epsilon^{i_1\cdots i_N}\Psi_{i_1}^{\dagger}(\Psi^{\dagger}A_-)_{i_2}\cdots(\Psi^{\dagger}A_-^{(N-1)})_{i_N}]^l\,|\,0\rangle, \tag{34}$$

其中 $A_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_1\pm\mathrm{i}A_2)$满足约束方程(26),$|\,0\rangle$可被 A_+ 和 Ψ 湮没掉.很容易发现 $\Psi(A_-)^i\sim\Psi_{s-i}\Psi_{gr}=$ Slater 行列式,而激发态可以写为

$$|\,\Psi_{\mathrm{exc}}\rangle=\prod_{i=1}^{N}(\mathrm{Tr}A_-)^{c_i}[\epsilon^{i_1\cdots i_N}\Psi_{i_1}^{\dagger}(\Psi^{\dagger}A_-)_{i_2}\cdots(\Psi^{\dagger}A_-^{(N-1)})_{i_N}]^l\,|\,0\rangle. \tag{35}$$

由于 Weyl 对称的 D_N 包括 $u_i\to-u_i$,因而基态波函数代替(15)被修正为

$$\prod_{i<j}(u_i-u_j)(u_i+u_j), \tag{36}$$

这里量子波函数可以由超势[23]的导数来表达

$$\Delta^{l+1}e^{-\frac{B}{2}\mathrm{Tr}(A_+)^2}e^{\hat{O}_L^{(D)}/(4B)}J_{\{\lambda\}}(\sqrt{2B}u_i). \tag{37}$$

其中

$$\hat{O}_L^{(D)}=\sum_i\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}+2(l+1)\times\sum_{l\neq m}\frac{1}{u_l^2-u_m^2}\Big(u_l\frac{\partial}{\partial u_l}-u_m\frac{\partial}{\partial u_m}\Big). \tag{38}$$

根据旋量函数推广的 Jack 多项式 $J_{\{\lambda\}}$同文献[24]中相似.

4 结论

事实上,作为 $n\otimes n$ 矩阵模型的左整体 $U(n)$对称(和 A_{n-1}weyl 对称)是平庸$(n+2)\times(n+2)$投影丛(更准确的讲是投影 sheaf)的“法向”部分,而右规范 $U(1)\sim O(2)$对称是切向部分.这就是人们熟知的瞬子的 ADHM 构造[25]和由 Witten 提出的超对称非线性 σ 模型.这两部分的对偶是模空间的 Kronheimear Nakayama 关系和 Hanany-Witten[26]镜象对称.

对围绕单极(6 膜)的模糊球 S^2 上的量子霍尔效应(QHE),$N\times N$ 的 ADHM 类矩阵描述的是在几

何 Berry 相背景下的不可压缩电子流体.

这篇文章的特别之处在于准粒子源决定了具有 A_{n-1}Weyl 不变对称 Kähler 流形的 moment map,并且这种 map 是一 $U(N)$Calogero 型 moment map.而且我们注意到了保面积 $n\times n$"规范"的不变性(包括共形不变).就像我们将两个平面上的普通 CM 模型映射到球面上的 CM 模型,通过对模空间上的辛结构分离变量来吸收掉哈密顿算符里的共形标度 $1+|\zeta|^2$.

作者感谢侯伯宇教授的指导,同时感谢熊传华的有益讨论.

参考文献(References)

1 Laughlin R B. Phys. Rev. Lett., 1983,**50**:1395—1398
2 Haldane F D M. Phys. Rev. Lett., 1983,**51**:605—608
3 Susskind L. The Quantum Hall Fluid and Non-Commutative Chern-Simons Theory. hep-th/0101029
4 Bemeving B A, Brodie J, Susskind L et al. JHEP, 2001,**02**:003
5 ZHANG Shou-Cheng, HU Jiang-Ping. Science, 2001,**294**:823—828
6 HU Jiang-Ping, ZHANG Shou-Cheng. Phys. Rev., 2002,**B66**:125301—125310
7 Polychronakos A P. JHEP, 2001,**04**:011
8 Morariu B, Polychronakos A P. JHEP, 2001,**07**:006
9 Hellerman S, Raamsdonk M V. JHEP, 2001,**10**:039
10 Karabali D, Sakita B. Phys. Rev., 2002,**B65**:075304—075308
11 Fabinger M. JHEP, 2002,**05**:037
12 CHEN Yi-Xin, HOU Bo-Yu, HOU Bo-Yuan. Nucl. Phys., 2002, **B638**:220—242
13 Polychronakos A P. JHEP, 2001,**06**:070
14 HOU Bo-Yu, PENG Dan-Tao, SHI Kang-Jie et al. Int. J. Mod. Phys., 2003,**A18**:2477—2500
15 HOU Bo-Yu, HOU Bo-Yuan, YUE Rui-Hong. J. Phys., 2002,**A35**:2937—2946
16 Seiberg N, Witten E. JHEP, 1999,**09**:032
17 Alekseev A, Recknagel A, Schomerus V. JHEP, 1999,**09**:023
18 Perelomov. Generalized Coherent States and Their Applications. Berlin: Springer, 1986
19 Chan Chuan-Tsung, CHEN Chiang-Mei, LIN Feng-Li et al. Nucl. Phys., 2002,**B625**:327—344
20 Gilmore R. Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications. New York: a Wiley-Interscience Publication, 1974
21 Hurtubise J C, Markman E. Comm. Math. Phys., 2001, **223**:533—552
22 Bordner A J, Manton N S, Sasaki R. Prog. Theor. Phys, 2000,**103**:463—487
23 Bordner A J, Corrigan E, Sasaki R. Prog. Theor. Phys., 1998, **100**:1107—1129
24 Nishino A, Ujino H, Wadati M. Symmetric Fock Space and Orthogonal Symmetric Polynomials Associated With the Calogero Model. cond-mat/9803284
25 Atiyah M F. Geometry of Yang-Mills Fields. Pisa: Accademia Nazionale del Lincei, 1979
26 Hanany A, Witten E. Nucl. Phys., 1997, **B492**:152—190

Quantum Hall Fluid on Fuzzy Two Dimensional Sphere

LUO Xu-Dong PENG Dan-Tao
(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract After reviewing the Haldane's description about the quantum Hall effect on the fuzzy two-sphere S^2, we construct the noncommutative algebra on the fuzzy sphere S^2 and the Moyal structure of the Hilbert space. By constructing noncommutative Chern-Simons theory of the incompressible Hall fluid on the fuzzy sphere and solving the Gaussian constraint with quasiparticle source, we find the Calogero matrix on S^2 and the complete set of the Laughlin wave function for the lowest Landau level, and this wave function is expressed by the generalized Jack polynomials in terms of spinor coordinates.

Key words quantum Hall fluid (QHF), fuzzy sphere, noncommutative Chern-Simons, Laughlin wave function

Received 8 March 2004