

# BEPC 中束束效应的计算模拟

张源<sup>1)</sup>

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

**摘要** 独立开发并行的正负电子储存环的束束效应模拟程序 SBBE. 通过求解自由空间内的 Poisson 方程计算束束作用力; 单圈的传输映射中引入了辐射阻尼效应和随机效应. 使用它对 BEPC 中的束束效应进行了计算模拟, 并与实测数据进行比较. 结果表明, SBBE 可以较好地再现 BEPC 中由束束效应所引发的现象, 具备一定的预言能力. 本工作为 BEPC II 的束束效应模拟研究.

**关键词** 束束作用 束束极限 相干频移

## 1 引言

束束效应是储存环对撞机性能最严重的限制因素之一. 它的作用过程是一种集体行为, 所以它比一般的非线性问题更复杂; 同时, 因为作用过程中存在很强的非线性效应, 所以它也比一般的尾场问题复杂. 束束效应的非线性、集体特性, 使得在研究这一问题时, 计算机模拟成为一种不可或缺的手段.

在束束作用的问题被提出后, 已经出现了大量的模拟程序, 基本可以分为两类: (1) 忽略集体特性, 把问题近似为单粒子在给定的束束作用力下的运动, 通常被称为弱强近似; (2) 引入集体效应, 使用自恰的方法求解作用力, 称为强强近似. 截至目前, 强强模拟已经真正具备了预测的能力, 亮度的预测精度达到 10% 左右<sup>[1,2]</sup>. 运算速度的加快和并行计算方法的应用, 使得在模拟中包含纵向动力学效应成为可能, Cai<sup>[1]</sup>的程序已经改进为 6 维的并行程序. 实际上, 目前已经存在了一定数量的 6 维强强模拟程序<sup>[2,3]</sup>, 尚没有进行系统的比较. 最近 Ohmi<sup>[4]</sup>利用模拟方法对束束极限的产生机制进行研究, 发现对于长束团 ( $\sigma_s > \beta_y/2$ ), 非相干运动导致束束极限, 而不是通常所认为的相干运动.

现有的模拟程序中, 经常需要人为地确定一些非物理参数, 如束团的宏粒子数量等来控制模拟的

精度, 从而可以在合理的时间内完成计算. 参考 Cai<sup>[1]</sup>的方法, 实现了 4 维相空间的并行模拟程序, 相对串行程序的实现方法, 计算效率提高了接近两倍. 这一工作, 使得在进行束束作用的模拟时, 更加容易对非物理参数的选择进行标定, 避免由于不合理的参数选择造成计算结果的错误.

## 2 物理模型

独立编写的 SBBE 是一个 4 维的束束效应计算模拟程序, 没有考虑粒子的纵向运动和束团的长度效应. 另外, 在求解束束作用的横向冲击力时, 忽略了真空管壁的影响, 采用自由空间近似. 程序中, 宏粒子每周的传输映射分为两部分: (1) 弧区的传输采用线性近似, 引入了辐射阻尼和随机效应; (2) 通过直接求解 Poisson 方程来计算对撞点的束束作用.

### 2.1 弧区的传输映射

粒子的运动使用加速器坐标来描述  $\mathbf{z} = (x, p_x, y, p_y)$ , 这里  $x$  和  $y$  分别是水平和垂直坐标, 它们的共轭动量定义为  $(p_x, p_y) = \gamma m (dx/dt, dy/dt) / P_0$ ,  $P_0$  是参考粒子的动量,  $m$  是电子的静止质量,  $\gamma$  是相对论的 Lorentz 因子. 在不考虑同步辐射和线性耦合时, 粒子在弧区的传输变换可以写成

$$\mathbf{z}_{n+1} = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{pmatrix} \mathbf{z}_n, \quad (1)$$

这里  $M_u$  ( $u = x$  或  $y$ ) 具有如下形式

$$M_u = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu_u) + \alpha_u \sin(2\pi\nu_u) & \beta_u \sin(2\pi\nu_u) \\ -\gamma_u \sin(2\pi\nu_u) & \cos(2\pi\nu_u) - \alpha_u \sin(2\pi\nu_u) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中  $\nu_u$  是横向运动的工作点,  $\alpha_u, \beta_u$  和  $\gamma_u$  是对撞点的 Courant-Snyder 参数,  $n$  是圈数. 对  $M_u$  进行相似变换可以得到一个旋转变换的矩阵

$$R_u = A_u^{-1} M_u A_u, \quad (3)$$

其中 
$$R_u = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu_u) & \sin(2\pi\nu_u) \\ -\sin(2\pi\nu_u) & \cos(2\pi\nu_u) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$A_u = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_u} & 0 \\ -\alpha_u/\sqrt{\beta_u} & 1/\sqrt{\beta_u} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

引入归一化坐标  $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{x}, \bar{p}_x, \bar{y}, \bar{p}_y)$ , 其定义为

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} A_x^{-1} & 0 \\ 0 & A_y^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{z}. \quad (6)$$

当粒子使用归一化坐标来表示时, 其在弧区的单圈传输映射是旋转变换,

$$\bar{\mathbf{z}}_{n+1} = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R_y \end{pmatrix} \bar{\mathbf{z}}_n. \quad (7)$$

参照 Hirata<sup>[5]</sup> 的方法, 在考虑辐射阻尼和量子激发效应时, 传输变换为

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{p}_u \end{pmatrix}_{n+1} = e^{-1/\tau_u} R_u \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{p}_u \end{pmatrix}_n + \sqrt{\varepsilon_u (1 - e^{-2/\tau_u})} \begin{pmatrix} r_u \\ r_{p_u} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中  $\tau_u$  是用粒子回旋圈数表示的横向阻尼时间,  $\varepsilon_u$  是没有束束作用时的平衡发射度,  $r$  是相互独立的单位 Gaussian 分布随机数.

## 2.2 束束作用

束团在正面对撞时, 一个束团中的粒子会受到另一个束团的横向冲击, 受作用粒子的横向动量的变化是

$$\Delta \mathbf{P} = -\frac{2e}{c} \cdot \nabla \phi, \quad (9)$$

其中  $e$  为粒子的电荷,  $c$  为光速,  $\phi$  可以写为

$$\phi = \iint \rho(x, y) \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_e)^2 + (y - y_e)^2}} \cdot dx dy, \quad (10)$$

这里  $\rho(x, y)$  是产生作用的束团横向空间电荷密度分布,  $(x_e, y_e)$  是受作用粒子的横向空间位置. 容易看出, 可以通过求解下面的二维 Poisson 方程得到  $\phi$

$$\nabla^2 \phi = -2\pi\rho(x, y). \quad (11)$$

## 3 计算方法

### 3.1 Poisson 方程的求解

在束束作用的强强模拟中, Poisson 方程的求解是非常耗费计算时间的. 在 SBBE 中参考了 Krishnagopal<sup>[6]</sup> 和 Cai<sup>[1]</sup> 的方法, 选择 FACR (Fourier Analysis and Cyclic Reduction) 算法<sup>[7,8]</sup> 求解方程 (11). 这一算法要求求解的横向空间是一个规则的矩形区域. 为了保持跟踪过程的自恰, 超出此区域的粒子, 程序中认为已经损失掉, 不再进行跟踪.

选定合适的空间区域后, 在其内部均匀划分一定数目的网格; 然后, 采用 TSC (Triangular Shaped Cloud) 方法把束团中的宏粒子分配到最近的 9 个网格点上, 并记录权重, 这一过程中电荷数量是守恒的; 与宏粒子所表示的束团粒子分布相比, 网格点上的电荷分布是更加平滑的, 所以使用后者来表示束团的实际分布, 代入 (10) 式, 计算空间区域边界上的  $\phi$ . 至此, Poisson 方程的求解即化为边界值问题, 可以使用 FACR 算法进行求解, 得到网格点上的  $\phi$ .

### 3.2 束束作用力的计算

通过求解 Poisson 方程, 可以得到网格点上的  $\phi$  值. 由 (9) 式可知, 在束束作用的过程中, 一个粒子受到的另一个束团的横向冲击与  $\phi$  的梯度成正比. 使用加速器坐标来表示, 则有

$$\Delta p_u = \frac{2e}{E_0} \cdot E_u, \quad (12)$$

$E_0 = P_0 c$  是粒子能量,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  表示冲击强度. 利用六点差分公式, 计算网格点上  $\phi$  的梯度, 得到  $\mathbf{E}$ .

在求解 Poisson 方程时, 使用了 TSC 方法把束团中的宏粒子分配到与其最相邻的 9 个网格点上, 并得到相应的分配权重. 此时, 已经得到了网格点处的束束作用冲击强度, 对于某一个宏粒子来说, 使用其分配时获得的权重系数, 对相应网格点上的  $\mathbf{E}$  加权并累计, 即得到其所在位置处的冲击强度, 代入 (12) 式, 可以得到宏粒子受到的束束作用力.

### 3.3 并行设计和实现

根据束束作用模拟程序的特点, 选择使用两个

计算结点来并行计算. 它们分别存储两个束团的宏粒子, 并负责相应束团的弧区传输计算; 在求解束束作用时, 首先由计算结点把宏粒子分配到网格点上, 然后结点之间交换网格点上的电荷分布数据, 从而可以用来求解 Poisson 方程, 得到另一束团产生的场, 完成束束作用的计算.

MPI 是目前最重要的并行编程工具, 它也是消息传递并行编程模式的标准, 使用它来编写并行程序. 在网络传输速度为 100Mb/s 的集群中进行测试, 计算效率接近串行程序的两倍, 效果良好.

#### 4 非物理参数的标定

在模拟程序中, 束团的宏粒子数量、横向空间求解区域以及网格数目等都是人为选定的非物理参数. 在计算时, 如果这些参数选择不合理, 结果将会出现较大偏差, 甚至是错误的. 所以在进行模拟时, 有必要对这些参数进行标定, 以求在合理的计算时间内, 得到更高精度的计算结果.

物理参数如后面的表 1 所示, 进行标定时, 选取束团流强 20mA, 跟踪一倍阻尼时间. 方法如下:

1) 宏粒子数量的标定. 其他参数保持不变, 当增加宏粒子数量亮度不再有明显变化时, 选定宏粒子数量进行下面的标定;

2) 网格数目的标定. 其他参数保持不变, 在合理的计算时间内, 当增加网格数量亮度不再有明显变化时, 选定网格数目进行下面的标定;

3) 求解区域的标定. 其他参数保持不变, 当增大求解区域时, 如果粒子损失不再明显减少且亮度不再有明显变化时, 选定求解区域.

如果对一次标定的结果不甚满意, 可以按照上面的步骤进行多次重复标定. 标定后, 选定宏粒子数目  $20 \times 10^4$ , 求解区域  $9\sigma_x \times 20\sigma_y$ , 网格数目  $256 \times 128$ .

#### 5 模拟程序的检验

如果束团中的粒子分布是 Gaussian 分布, 可以使用 B-E(Bassetti-Erskine)公式<sup>[9]</sup>计算束流电场

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{Q}{2\epsilon_0 \sqrt{2\pi(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \cdot \text{Im}[\Gamma], \\ E_y &= \frac{Q}{2\epsilon_0 \sqrt{2\pi(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \cdot \text{Re}[\Gamma], \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $Q$  是束团中粒子的总电量,  $\sigma_x, \sigma_y$  分别是束团在水平和垂直方向的均方根尺寸,

$$\Gamma = \left[ w \left( \frac{x + iy}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right) - e \left[ -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] \times w \left( \frac{x \frac{\sigma_y}{\sigma_x} + iy \frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right) \right], \quad (14)$$

这里使用了复型误差函数  $w(z)$ , 其定义为

$$w(z) = e^{-z^2} \left[ 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta \right]. \quad (15)$$

使用 SBBE 计算了 Gaussian 分布下的束束作用力, 并与 B-E 公式的计算值进行了对比. 图 1 给出了采用两种方法得到的粒子在  $x$  轴和  $y$  轴上受到的束束作用力. 计算采用的参数如后面的表 1 所示. 从图 1 可以看出, SBBE 的计算结果与解析解吻合的很好, 这说明在束团近似 Gaussian 分布的情况下, 所使用的宏粒子数目已经足够多, 网格划分已经足够精细.

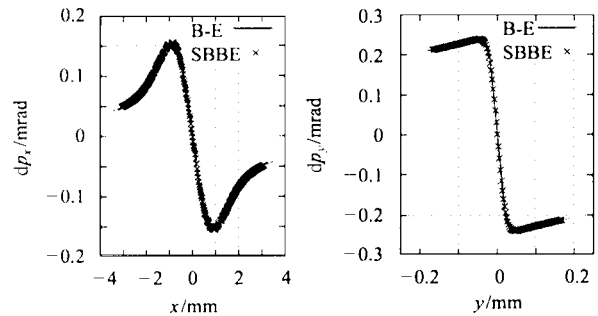


图 1 Gauss 分布束团在坐标轴上的束束作用力  
单个束团由  $2 \times 10^5$  个宏粒子来表示, 横向求解区域是  $9\sigma_x \times 20\sigma_y$ , 网格数目  $256 \times 128$ .

#### 6 BEPC 的束束效应模拟

使用 SBBE 对 BEPC 中的束束效应进行了计算模拟. BEPC 在实际运行中, 采用单束团对撞, 两个对撞点, 单点取数, 相应的两个半环是对称的. 由于 SBBE 只能对一个对撞点的情况进行跟踪, 为了方便比较模拟结果和实验数据, 对 BEPC 的参数进行如下处理: (1) 工作点减半; (2) 阻尼时间对应的圈数加倍. 最终, 模拟程序中使用的机器参数如表 1 所示, 其中, 对撞点的 beta 函数是实测得到的, 垂直方向的发射度是通过实测束团的横向耦合度计算得到.

以下进行的模拟, 正负电子束团的流强均相等, 所谓的流强均为单束团流强. 由于阻尼时间太长, 限制了计算时的跟踪圈数, 以下结果都是跟踪了两倍

阻尼时间后得到的,已经趋于稳定.

表 1 模拟使用的参数

束流能量/GeV	1.5347
水平/垂直发射度/(nm·rad)	388.7/4.3
水平/垂直工作点	2.9154/3.3753
水平/垂直阻尼时间/tums	129926/130192
对撞点的水平/垂直 beta 函数/m	1.23/0.067
对撞点的水平/垂直 alpha 函数	0/0
回旋周期/s	$8.0189 \times 10^{-7}$

### 6.1 亮度模拟

使用 SBBE, 计算了不同流强下的亮度, 得到了亮度随流强的变化曲线, 如图 2 所示. 对比模拟结果和实测值, 可以看出, 当流强低于 20mA 时, 模拟与实测的亮度随流强变化趋势基本一致.

观察图 2 中实测亮度随流强的变化趋势, 发现

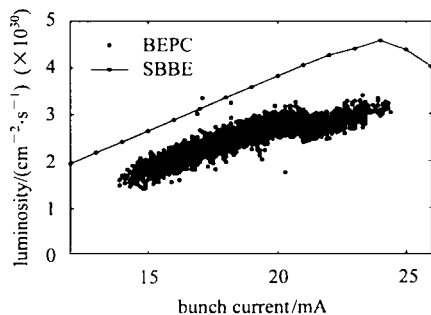


图 2 BEPC 亮度随流强的变化趋势 - 模拟结果和实测值的对比

模拟得到的亮度在流强大于 24mA 时随流强增加反而降低.

一个特殊现象: 束团流强在 21mA 附近时, 亮度随流强的增加而变低, 即出现了第一个束束极限. 在 SBBE 的亮度模拟结果中, 第一个束束极限并不明显, 这可能与模拟程序中没有引入纵向束长有关. 另外模拟得到的亮度在流强为 24mA 时达到了最大值, 这其实是由于粒子损失引起的束束极限, 详细的分析见后面关于束束极限的讨论.

### 6.2 相干束束频移

束束作用参数  $\xi_u$  ( $u = x$  或  $y$ ) 是用来表征束束效应强度的, 其定义为

$$\xi_u = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma(\sigma_x + \sigma_y)} \frac{\beta_u}{\sigma_u}, \quad (16)$$

这里  $r_e$  是电子的经典半径,  $\gamma$  是粒子的相对论能

量,  $N$  是束团中的粒子数目,  $\beta$  是对撞点的 beta 函数,  $\sigma$  是束团在对撞点处的均方根尺寸. 用表 1 中的数据来计算  $\xi_u$ , 即得到所谓的名义束束作用参数.

相干束束频移的计算是检验模拟程序的重要标准. 图 3 给出了束束频移随垂直方向名义束束作用参数的变化趋势. 模拟结果与测量数据比较, 趋势基本一致. 在模拟中, 还得到了相干频移的两个极大值  $0.0590 @ \xi_y = 0.0916$  ( $I = 22\text{mA}$ ),  $0.0587 @ \xi_y = 0.1000$  ( $I = 24\text{mA}$ ).

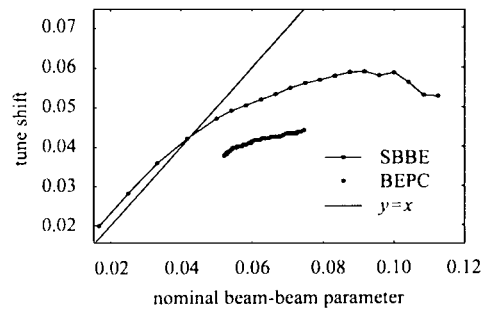


图 3 束束频移随垂直方向名义束束作用参数的变化  
模拟得到了相干频移的两个极大值:  $0.0590 @ \xi_y = 0.0916$   
( $I = 22\text{mA}$ ),  $0.0587 @ \xi_y = 0.1000$  ( $I = 24\text{mA}$ ).

### 6.3 束束极限

由亮度的模拟结果, 得到流强为 24mA 时, 亮度达到最大值; 由相干频移的模拟结果, 得到流强为 22mA 和 24mA 时分别出现了两个极大值. 为了对这些极限情况的产生机制进行了解, 在模拟跟踪过程中记录了束团的均方根尺寸以及粒子的损失情况.

束团的垂直方向均方根尺寸随流强的变化如图 4 所示, 26mA 处达到最大值. 在流强为 22—23mA 附近, 束团尺寸出现相对不平滑的变化, 相干束束频移在 22mA 附近出现的极大值可能是由此引起的.

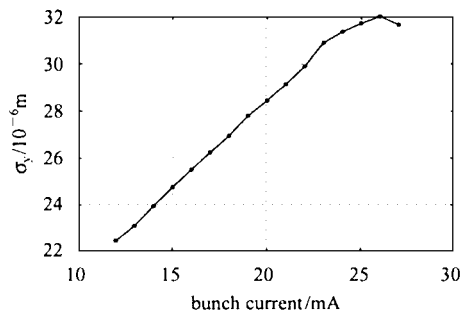


图 4 束团的垂直方向均方根尺寸随流强的变化  
束团尺寸在 26mA 处出现了最大值.

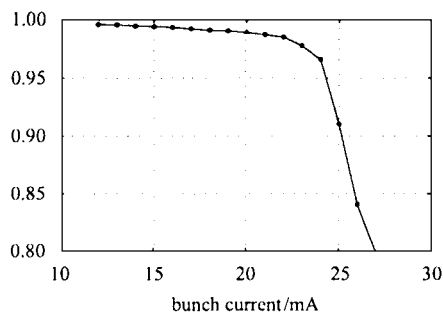


图 5 不同初始流强下,在跟踪两倍阻尼时间后剩余宏粒子的百分比  
当流强大于 24mA 后,粒子损失突然增大.

图 5 给出了跟踪两倍阻尼时间后剩余宏粒子占初始数目的百分比.在 24mA 处,曲线的变化趋势发生突变:当流强继续增大时,粒子损失突然加剧.相应的,如图 2 所示,在亮度模拟中,流强为 24mA 时,亮度达到了最大值,流强继续增加时,亮度不再升高.由此得出结论,当流强为 24mA 时出现了束束极限.经过多年的运行优化,BEPC 在这一能量下能够

达到的最高对撞流强是 25mA,即实际运行中得到的第二个束束极限发生在 25mA 附近.

## 7 结论

使用独立编写的束束效应强模拟程序 SBBE,对 BEPC 中束束作用的相关现象进行计算:(1)亮度的模拟结果与实测值在一定的流强范围内趋势一致;(2)模拟所得到的相干束束频移与实测结果相比趋势一致;(3)计算确定的束束极限与实际运行经验一致.所以认为,使用 SBBE 对束束效应进行模拟研究是可行的,以此为基础在其后续开发中,将引入纵向的束长效应和交叉角效应,对 BEPCII 中存在的束束效应尤其是束束极限的产生机制进行广泛、深入的模拟研究,为其建造和对将来的运行提供理论依据.

作者感谢陈利民研究员的悉心指导和 BEPC 物理组同事的热心帮助.

## 参考文献 (References)

- 1 CAI Yun-Hai, Chao A W, Tzenov S I. Phys. Rev. ST Accel. Beams, 2001, **4**:011001
- 2 Ohmi K. Phys. Rev. , 2000, **E62**:7287
- 3 Anderson E B, Banks T I, Rogers J T. PAC'99, New York, 1999
- 4 Ohmi K. Phys. Rev. Lett., 2004, **92**:214801
- 5 Hirata K, Ruggiero F. CERN/LEP-TH/89-43
- 6 Krishnagopal S. Phys. Rev. Lett., 1996, **76**:235
- 7 Press W H et al. Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing 2nd ed. Cambridge University Press, 2002
- 8 LÜ Tao, SHI J M, LIN Z B. Domain Decomposition Methods: New Numerical Techniques for Solving PDE. Beijing: Science Publisher, 1992. 170—182 (in Chinese)  
(吕涛,石济民,林镇宝.区域分解算法:偏微分方程数值求解新技术.北京:科学出版社,1992.170—182)
- 9 Bassetti M, Erskine C A. CERN-ISR-TH/80-06

## Simulation of Beam-Beam Effects in BEPC

ZHANG Yuan<sup>1)</sup>

(Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

**Abstract** A parallel self-consistent code SBBE to simulate the beam-beam effects in  $e^+e^-$  storage ring has been developed. It calculates the transverse kick in a collision by directly solving the Poisson equation with an open boundary. Radiation damping effect and excitation random effect are included in arc transport. By using this code, the simulation of beam-beam interaction on BEPC was made, and the simulated result was compared to the experiment result. The simulated luminosity agrees to the measured one qualitatively. The beam-beam limit was calculated in simulation and agreed well with the measured one.

**Key words** beam-beam interaction, beam-beam limit, coherent tune shift

Received 31 March 2004

1) E-mail: zhangy@mail.ihep.ac.cn