

旋转磁场中朗道系统的非绝热非周期性 量子几何相位和 Hannay 角 *

宋元军^{1,2} 王顺金^{1,3,4;1)} 张光彪³

1 (四川大学物理系 成都 610064)

2 (河北北方学院物理系 张家口 075000)

3 (兰州大学现代物理系 兰州 730000)

4 (兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心 兰州 730000)

摘要 基于代数动力学,精确求解了旋转磁场中的朗道系统,讨论了它的一般几何相位,给出了
一般量子几何相位中对应于规范势的那部分相位的经典对应。数值计算结果显示非绝热演化和
绝热演化重大区别:非绝热演化诱导的非绝热量子激发引起系统物理量的非周期性和复杂性,
体现了环境对系统的影响。

关键词 非自治朗道系统 非绝热演化与非绝热量子激发 非周期性 几何相位

1 引言

几何相位^[1-7]一直是人们感兴趣的一个研究领域。自从贝利发表了他关于量子几何相位的重要发现^[2]以来,贝利相位的研究几乎进入到了物理学的所有分支,象分子物理、凝聚态物理^[3]等。然而,大多数的文章是关于绝热周期几何相位的,较少是关于非绝热^[4]非周期^[5]的。在这篇文章里,我们将讨论旋转磁场中朗道系统的非绝热非周期量子几何相位及其经典对应问题。尽管非自治朗道系统已经吸引了大量研究兴趣^[7,8],但据我们所知,还没有人从非绝热非周期的角度来研究这一系统的几何相位。本文包括3部分内容:首先,我们精确求解了旋转磁场中朗道系统,推导出它的一般几何相位;其次,研究这一系统几何相位的量子经典对应;最后,给出几何相位演化的数值曲线,并对曲线做了物理分析,讨论了非绝热演化与绝热演化的重大区别。

2 系统的解和一般几何相位

2.1 系统的解

我们考虑一个电子在一个旋转磁场 $\mathbf{B} = (a \cos \omega t, b \sin \omega t, 0)$ 中的运动。其中 a 和 b 是两个参数, ω 是磁场的旋转频率。系统的哈密顿量为

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2m}(\hat{P}_x + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2, \quad (1)$$

把矢势选成 $\mathbf{A} = (-zb \sin \omega t, za \cos \omega t, 0)$, 则哈密顿量变为

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2m}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \frac{1}{2m}\hat{H}_z(t), \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{H}_z(t) &= \hat{P}_z^2 - \frac{2eB}{c}(b\hat{P}_x \sin \omega t - a\hat{P}_y \cos \omega t)z + \\ &\quad \left(\frac{e}{c}\right)^2 B^2 [b^2(\sin \omega t)^2 + a^2(\cos \omega t)^2]z^2, \end{aligned} \quad (3)$$

由于 $[\hat{P}_x, \hat{H}(t)] = [\hat{P}_y, \hat{H}(t)] = 0$, P_x 和 P_y 是两个

2004-09-14 收稿

* 国家自然科学基金(10175029, 10375039), 教育部博士点基金和中国科学院兰州重离子加速器国家实验室核理论中心基金资助

1) E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn

守恒量 $\hat{H}_z(t)$ 可以写成

$$\hat{H}_z(t) = \hat{E}_2 + b_{-1}(t)\hat{E}_{-1} + b_{-2}(t)\hat{E}_{-2}, \quad (4a)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{E}_{-2} &= \hat{z}^2, \hat{E}_2 = \hat{P}_z^2, \hat{E}_{20} = \frac{1}{2}(\hat{P}_z\hat{z} + \hat{z}\hat{P}_z), \\ \hat{E}_{-1} &= \hat{z}, \hat{E}_1 = \hat{P}_z, \hat{E}_{10} = i,\end{aligned}\quad (4b)$$

$$b_{-1}(t) = -\frac{2eB}{c}[bP_x \sin\omega t - aP_y \cos\omega t], \quad (5a)$$

$$b_{-2}(t) = \left(\frac{e}{c}\right)^2 B^2 [b^2(\sin\omega t) + a^2(\cos\omega t)^2]. \quad (5b)$$

由于 $\hat{E}_{-2}, \hat{E}_2, \hat{E}_{20}, \hat{E}_{-1}$ 和 \hat{E}_{10} 是群 $su(1,1) \oplus h(3)$ 的生成元, $\hat{H}(t)$ 具有 $su(1,1) \oplus h(3)$ 代数结构,可以运用代数动力学方法来精确求解薛定谔方程,

$$i \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\Psi_n(t)\rangle \text{(取 } \hbar = 1\text{).} \quad (6)$$

我们进行规范变换

$$\hat{U}_g^{-1}(t) = e^{if_0\hat{E}_{20}} e^{if_{-2}\hat{E}_{-2}} e^{if_1\hat{E}_1} e^{if_{-1}\hat{E}_{-1}} (\hat{U}_g^{-1}(0) = 1), \quad (7)$$

于是,在规范参考系中,波函数和哈密顿量变为

$$|\bar{\Psi}_n(t)\rangle = \hat{U}_g^{-1} |\Psi_n(t)\rangle, \quad (8a)$$

$$\hat{H}_g(t) = \hat{U}_g^{-1}(t) \hat{H}(t) \hat{U}_g(t) - i \hat{U}_g^{-1}(t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_g(t). \quad (8b)$$

选择满足下述条件的最佳规范变换^[9],

$$\begin{cases} m \frac{df_{-2}}{dt} = -\frac{1}{2}f'_0 + 2f_{-2}^2 + \frac{1}{2}b_{-2}(t) \\ m \frac{df'_0}{dt} = 8f'_0 f_{-2} \\ m \frac{df_{-1}}{dt} = b_{-2}(t)f_1 + \frac{1}{2}b_{-1}(t) \\ m \frac{df_1}{dt} = -f_{-1} \\ f'_0 = e^{-4}f_0 \\ f_{-2}(0) = f_{-1}(0) = f_0(0) = f_1(0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$\hat{H}_g(t)$ 实现了对角化,

$$\hat{H}_g(t) = A(t)\hat{I}(0) + B(t) + \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m}, \quad (10)$$

其中, $\hat{I}(0)$ 是标准的一维谐振子的哈密顿量

$$\hat{I}(0) = \frac{1}{2}(\hat{P}_z^2 + z^2), \quad (11)$$

$$A(t) = \frac{e^{-2f_0}}{m}, \quad (12a)$$

$$B(t) = \frac{1}{2m} \left[\left(b_{-1}(t) - 2m \frac{df_{-1}}{dt} \right) f_1 + \right.$$

$$\left. b_{-2}(t)f_1^2 + f_{-1}^2 \right]. \quad (12b)$$

同时,规范变换后的薛定谔方程变为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\Psi}_n(t)\rangle = \hat{H}_g |\bar{\Psi}_n(t)\rangle. \quad (13)$$

$\hat{I}(0)$ 的本征方程很容易求解,

$$|\hat{I}(0) + n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle. \quad (14)$$

$|n\rangle$ 是谐振子波函数.从(10)—(14)式很容易得到(13)式的解 $|\bar{\Psi}_n(t)\rangle$,再由方程(8a)的逆变换求得薛定谔方程(6)的解,

$$|\Psi_n(t)\rangle = \hat{U}_g(t) |\bar{\Psi}_n(t)\rangle = \frac{1}{2\pi} e^{i(P_x t + P_y)} e^{-i\Theta(t)} \hat{U}_g(t) |n\rangle, \quad (15)$$

其中 $|\bar{\Psi}_n(t)\rangle$ 的总相位

$$\Theta(t) = \int_0^t \left[\frac{(P_x^2 + P_y^2)}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right) A(\tau) + B(\tau) \right] d\tau. \quad (16)$$

2.2 系统的一般几何相位

现在我们来推导系统的一般意义上的几何相位,即著名的 Pancharatnam^[1]几何相位.在任一时刻总相位为

$$\begin{aligned}\gamma_{0 \rightarrow t} &= \text{Im}(\ln \langle \Psi_n(0) | \Psi_n(t) \rangle) = \\ &- \Theta(t) + \text{Im}(\ln \langle \bar{\Psi}_n(t) | \hat{U}_g(t) | \bar{\Psi}_n(t) \rangle) = \\ &- \Theta(t) + \gamma_{u_g}(t),\end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\gamma_{u_g}(t)$ 是由规范变换诱导的几何相位,可写为

$$\begin{aligned}\gamma_{u_g}(t) &= \text{Im}(\ln \langle n | \hat{U}_g(t) | n \rangle) = \\ &\text{Im}(\ln \langle n | e^{-i(f_{-1}z + f_{-2}(z-f_1)^2)} | n \rangle_{z \rightarrow (e^{-f_0}(z-f_1))}).\end{aligned} \quad (18)$$

系统的 Pancharatnam 几何相位为

$$\beta(t) = \gamma_{0 \rightarrow t} - \gamma_d(t) = \gamma_I(t) + \gamma_{u_g}(t), \quad (19)$$

其中,

$$\gamma_d(t) = \int_0^t \langle \Psi_n(\tau) | \hat{H}(\tau) | \Psi_n(\tau) \rangle d\tau, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}\gamma_I(t) &= \int_0^t \langle \Psi_n(\tau) | -i \hat{U}_g \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{U}_g^{-1} | \Psi_n(\tau) \rangle d\tau = \\ &\int_0^t \langle \bar{\Psi}_n(\tau) | \left[\frac{df_{-2}}{d\tau} e^{2f_0} \hat{E}_{-2} + \frac{df_0}{d\tau} \hat{I} + \right. \\ &\left. \left(\frac{df_{-1}}{d\tau} - 2 \frac{df_1}{d\tau} f_{-2} \right) e^{f_0} \hat{E}_{-1} + \right. \\ &\left. \frac{df_1}{d\tau} e^{-f_0} \hat{E}_1 + \frac{df_{-1}}{d\tau} f_1 \right] | \bar{\Psi}_n(\tau) \rangle d\tau =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{df_{-2}(\tau)}{d\tau} e^{2f_0(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{df_{-1}(\tau)}{d\tau} f_1(\tau) d\tau = \\ & \int_0^t \frac{1}{2m} [e^{2f_0(\tau)} (4f_{-2}^2(\tau) + b_{-2}(\tau)) - e^{-2f_0(\tau)}] d\tau + \\ & \int_0^t \left(b_{-2}(\tau) f_1^2(\tau) + \frac{1}{2} b_{-1}(\tau) f_1(\tau) \right) d\tau, \quad (21) \\ & I = n + \frac{1}{2}. \quad (22) \end{aligned}$$

3 几何相位的量子 - 经典对应

我们首先定义经典 $su(1,1) \oplus h(3)$ 代数的 C 数生成元:

$$\begin{aligned} E_{-2} &= z^2, E_2 = P_z^2, E_{20} = P_z z, \\ E_{-1} &= z, E_1 = P_z, E_{10} = i. \quad (23) \end{aligned}$$

经典代数关系是泊松括号定义的.于是,系统的经典哈密顿量可以通过用经典 C 数生成元 $\{E_{-2}, E_2, E_{20}, E_{-1}, E_1, E_{10}\}$ 代替量子 Q 数生成元 $\{\hat{E}_{-2}, \hat{E}_2, \hat{E}_{20}, \hat{E}_{-1}, \hat{E}_1, \hat{E}_{10}\}$ 而得到,经典哈密顿量显然也具有经典的 $su(1,1) \oplus h(3)$ 代数结构. 我们同样可以选择一个与量子情况相似的经典规范变换,

$$U_g^{c-1}(t) = e^{-f_0 E_{20}} e^{-f_{-2} E_{-2}} e^{-f_1 E_1} e^{-f_{-1} E_{-1}}, \quad (24)$$

按照泊松括号运算规则和 $su(1,1) \oplus h(3)$ 代数的关系,可得经典规范变换后的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_g(t) &= U_g^{c-1} H(t) U_g^c - U_g^{c-1} \frac{\partial}{\partial t} U_g^c = \\ & A(t) I(0) + B(t) + \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m}, \quad (25a) \end{aligned}$$

$$I(0) = \frac{1}{2}(E_2 + E_{-2}). \quad (25b)$$

具体说,在推导方程(25)时,我们用到了经典规范变换的运算规则,如下:

$$\begin{aligned} O_g &= e^{-\alpha(t) X(q,p)} O e^{\alpha(t) X(q,p)} = \\ e^{-\alpha(t) L_X} O &= \sum_0^\infty \frac{(-\alpha(t))^n}{n!} (L_X)^n O, \quad (26) \end{aligned}$$

$$L_X \equiv \{X, O\}, \quad (27)$$

其中 L_X 为刘维算子, $\{\dots\}$ 为泊松括号.

利用(25a)式的逆变换,原来的经典哈密顿量可以改写成

$$H(t) = U_g^c H_g(t) U_g^{c-1} - U_g^c \frac{\partial}{\partial t} U_g^{c-1}, \quad (28a)$$

其中,

$$U_g^c H_g(t) U_g^{c-1} = A(t) I(t) + B(t) + \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m}, \quad (28b)$$

$$- U_g^c \frac{\partial}{\partial t} U_g^{c-1} = a_{-2} E_{-2}(t) + a_0 E_{20}(t) +$$

$$a_{-1} E_{-1}(t) + a_1 E_1(t) + a, \quad (28c)$$

$$I(t) = U_g^c I(0) U_g^{c-1}, \quad (29a)$$

$$E_\alpha(t) = U_g^c E_\alpha U_g^{c-1} (\alpha = -2, -1, 1, 20), \quad (29b)$$

$$a_{-2} = \frac{df_{-2}}{dt} e^{2f_0}, a_0 = \frac{df_0}{dt},$$

$$a_{-1} = \left(\frac{df_{-1}}{dt} - 2 \frac{df_1}{dt} f_{-2} \right) e^{f_0},$$

$$a_1 = \frac{df_1}{dt} e^{-f_0}, a = \frac{df_{-1}}{dt} f_1 \quad (29c)$$

若用 a_μ 来表示(21),则有

$$\gamma_I = I \int_0^t a_{-2} d\tau + \int_0^t a d\tau. \quad (30)$$

我们选用作用量 - 相角表象,并且作相应的正则变换

$$z(t) = \sqrt{2I(t)} \sin \theta, \quad (31a)$$

$$P_z(t) = \sqrt{2I(t)} \cos \theta. \quad (31b)$$

容易检验,如果 $\{\theta, I\} = 1$,那么 $\{z(t), P_z(t)\} = 1$. 于是得到作用量 - 相角表象中经典哈密顿量的表达式

$$\begin{aligned} H(t) &= U_g^c H_g(t) U_g^{c-1} - U_g^c \frac{\partial}{\partial t} U_g^{c-1} = \\ & A(t) I + B(t) + \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \\ & a_{-2} 2I \sin^2 \theta + a_0 2I \sin \theta \cos \theta + \\ & a_{-1} \sqrt{2I} \sin \theta + a_1 \sqrt{2I} \cos \theta + a. \quad (32) \end{aligned}$$

定义一个与哈密顿量中的规范项(28c)式相对应的角频率

$$\omega_g(t) = \frac{\partial}{\partial I} \left(- U_g^c \frac{\partial}{\partial t} U_g^{c-1} \right), \quad (33)$$

于是,不难得到如下的经典 Hannay 角

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle_{(\theta)} &= \int_0^t \langle \omega_g(\tau) \rangle_\theta d\tau = \\ \frac{\partial}{\partial I} \int_0^t \langle -i U_g^c \frac{\partial}{\partial \tau} U_g^{c-1} \rangle_{(\theta)} d\tau &= \\ \frac{\partial}{\partial I} \int_0^t [\langle a_{-2} 2I \sin^2 \theta + a_0 2I \sin \theta \cos \theta + \\ & a_{-1} \sqrt{2I} \sin \theta + a_1 \sqrt{2I} \cos \theta + a \rangle_{(\theta)}] d\tau = \int_0^t a_{-2} d\tau. \quad (34) \end{aligned}$$

其中 $\langle \dots \rangle_\theta$ 表示要对角变量 θ 积分. 因此,根据(30)和(34)式得到

$$\langle \theta \rangle_{(\theta)} = \frac{d\gamma_I(t)}{dI}. \quad (35)$$

这一结果和贝利在绝热演化中得出的结论^[10]是完全一致的.

4 数值结果与分析

首先, 我们选择混合单位制: $\hbar = 1$, $m_e = 1$, t (second). 从这些基本约定, 可知动量的单位为 $\sqrt{m_e \hbar}$. 为了简化计算, 取 $\frac{eB}{c} = 1$, $2P_x = 1$, $P_y = 0$. 这意味着, 在国际单位制中我们选取 B , $2P_x$ 和 P_y 分别

为 $B = \frac{cm_e}{e} \sqrt{\frac{m_e}{\hbar}} \approx 0.0632$ (T), $2P_x = \sqrt{m_e \hbar} \approx 2.47 \times 10^{-32}$ kg · m · s⁻¹, $P_y = 0$. 同时我们设 $a = 1$, $b = 2$, $\omega = 2\pi$ (s⁻¹). 于是, 微分方程组(9) 变为

$$\begin{cases} \frac{df_{-2}}{dt} = -\frac{1}{2}f'_0 + 2f_{-2}^2 + \frac{1}{2}(3(\sin 2\pi t)^2 + 1) \\ \frac{df'_0}{dt} = 8f'_0 f_{-2} \\ \frac{df_{-1}}{dt} = (3(\sin 2\pi t)^2 + 1)f_1 - \sin 2\pi t \\ \frac{df_1}{dt} = -f_{-1} \\ f_{-2}(0) = f_{-1}(0) = f_0(0) = f_1(0) = 0, \end{cases} \quad (36)$$

上述方程组是非线性的, 只能数值求解它(结果见图1). 从图1发现 f_{-2} , f_{-1} , f_0 和 f_1 不再拥有哈密顿量中磁场参数的变化周期, 因而系统的波函数也不再拥有哈密顿量的演化周期. 这与绝热演化全然不同, 那里系统的波函数拥有哈密顿量的演化周期. 而且, 若参数选择合适, 使方程组(9) 有解析解的话, 那么还可以判断在什么条件下 f_{-2} , f_{-1} , f_0 和 f_1 有公共周期. 把上述数值解代入(18), (21) 和(19) 式, 可分别得到 $\gamma_{u_g}(t)$, $\gamma_I(t)$ 和 $\beta(t)$ 的数值解(图2).

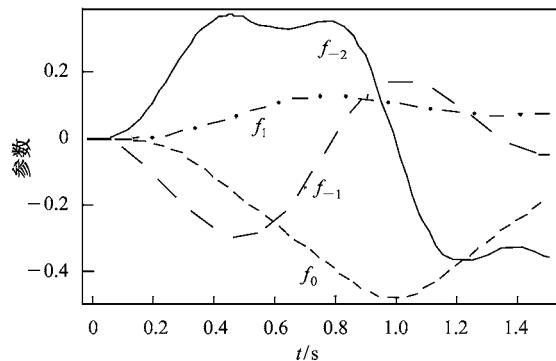


图1 规范变换参数随时间的演化曲线

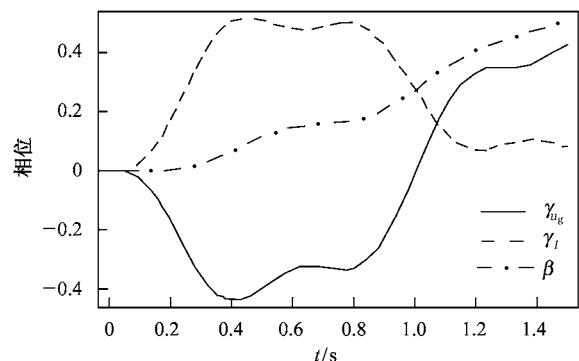


图2 几何相位随时间的演化曲线($n = 1$)

从图2不难发现, 当 $t = 1$ 时(参数演化了一个周期), 系统获得一个总的几何相位. 这个相位主要来自 γ_I (1) 的贡献, 因为 $\gamma_{u_g}(1) \approx 0$. 这是和绝热情形相一致的. 其次, 在绝热情形下, 几何相位满足关系式 $\beta(\tau) = \beta(\tau + t) - \beta(t)$ (其中 τ 为参数的演化周期, t 为任何时刻). 但从我们得到的非绝热几何相位随时间的演化曲线不难发现, $\beta(1.4) - \beta(0.4) \neq \beta(1)$, 这是和绝热情形明显不同的. 我们把几何相位非绝热演化的这种特点称为几何相位的非参数周期性. 出现上述波函数及几何相位非参数周期的原因是, 尽管哈密顿量是线性的, 它所包含的参数却是时间的周期性函数, 在非绝热演化过程中, 哈密顿量所包含的参数随时间的变化要导致额外的量子激发, 这是环境通过哈密顿量所包含的含时参数产生的对系统的影响, 是非自治量子系统的特点. 当用规范变换方法精确求解薛定谔方程时, 这一过程导致规范变换参数的非线性方程组, 正是这种体现环境影响的非线性方程组造成了系统的非周期性和复杂性, 这包括波函数和几何相位的非周期性. 与此相反, 在绝热演化中, 系统沿绝热的量子轨道演化, 非绝热量子跃迁被忽略, 当系统沿哈密顿量的参数演化一周时, 除了额外获得的几何相位和动力学相位(以及二者之和的总相位)外, 系统又回到原位, 因此物理量显示出与哈密顿量的参数相同的周期性. 这是非绝热演化和绝热演化重大区别: 非绝热量子激发引起的非周期性和复杂性, 体现了环境与系统的相互作用, 是非自治量子系统与自治量子系统的重大区别.

5 结论

总之, 基于代数力学, 我们不仅求得了旋转磁

场中朗道系统的精确解,而且讨论了它的一般几何相位.数值结果表明,该系统的非绝热精确解及其几何相位不具有哈密顿量参数的周期性.这是非绝热演化和绝热演化重大区别:非绝热演化中额外的非绝热量子激发引起系统物理量的非周期性和复杂性,体现了环境对系统的影响.我们还发现该系统的

非绝热非周期几何相位可以分为两个部分,其中对应于规范势的那部分几何相位有精确的量子-经典对应,所得到的经典几何相位与量子几何相位的关系与贝利在绝热演化近似下得到的结果完全一致.上述结果对于了解非自治朗道系统的物理内涵,实现对系统的控制与利用有参考价值.

参考文献(References)

- 1 Pancharatnam S. Pro. Indian Acad. Sci., 1956, **A44**:247
- 2 Berry M V. Pro. R. Soc. Lond., 1984, **A392**:45—57
- 3 Raffaele Resta. J. Phys., Condens. Matter, 2000, 12:R107—R143
- 4 Ge Y C, Child M S. Phys. Rew. Lett., 1997, **78**:2507
- 5 Zak J. Europhys. Lett., 1989, **9**(7):615—620
- 6 Aharonov Y, Popescu S, Reznik B et al. Phys. Rew. Lett., 2004, **92**:020401
- 7 James Chee. Phys. Lett. 2000, **A275**:473—480
- 8 YING Zu-Jian, WANG Shun-Jin, ZHANG Wen-Zhong. Chin. Phys. Lett., 1999, **16**(6):391—393
- 9 WANG Shun-Jin. Progress in Physics, 1999, **19**(4):331—370 (in Chinese)
(王顺金. 物理学进展, 1999, **19**(4):331—370)
- 10 Berry M V. J. Phys., Math. Gen., 1985, **A18**:15—27

Nonadiabatic Geometric Phase and Hannay's Angle of the Nonautonomous Landau System in a Rotating Magnetic Field^{*}

SONG Yuan-Jun^{1,2} WANG Shun-Jin^{1,3,4;1)} ZHANG Guang-Biao³

1 (Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

2 (Department of Physics, Hebei North University, Zhangjiakou 075000, China)

3 (Department of Modern Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

4 (Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator Lanzhou, Lanzhou 730000, China)

Abstract Using algebraic dynamics, the Landau system in a rotating magnetic field has been solved and the general geometric phase is calculated. The classical correspondence between the quantum geometric phase and Hannay angle related to gauge potentials is established. The relation between nonadiabaticity and nonperiodicity is investigated numerically.

Key words nonautonomous Landau system, nonadiabaticity, nonperiodicity, geometric phases

Received 14 September 2004

* Supported by National Natural Science Foundation of China(10175029, 10375039), Doctoral Program Foundation from the Ministry of Education in China and Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator Lanzhou

1) E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn